発展演習

# 微積分から極限へ

**１．** $n$ を自然数とするとき、次の問いに答えよ。

(1) すべての正の数 $x$ に対して、$x^{n+1}e^{-x} \leqq (n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}$ を求めよ。

（東京学芸大）

**２．** 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3}x-2\sqrt{x+1}}{x-2}$　（工学院大）　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{1}{x-\pi}\int_{\pi}^{x} t\cos t\,dt$　（東海大）

**３．** $c>1,\ a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{a_n+c}$ で定められる数列$\{a_n\}$が極限値 $A$ をもつことを仮定してその値を求め、実際に、$\{a_n\}$が極限値 $A$ に収束することを示せ。

（芝浦工大）

**４．** (1) $x>0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$e^x > 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

(2) (1)の不等式を用いて、与えられた任意の正の整数 $k$ に対して、$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x}=0$ であることを証明せよ。

（慶応大）

**５．** (1) $0<x<1$ のとき、$-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\log x$ が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x$ を求めよ。

（京都産大）

６．(1) 2 つの関数 $\sqrt{x+1}$ と $\log(x+1)$との大小を比較せよ。ただし、$x>0$ とする。

(2) $\lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}}$ を求めよ。

（九州工大）

７．(1) $x$ が正の数であるとき、次の不等式を証明せよ。

$$x>\log(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$$

(2) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$ とおくとき、$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

（富山大）

８．$x≧0$ に対して $f(x)$は $1+x=e^{x+f(x)}$ をみたす関数とする。

(1) $-x^2≦f(x)≦0$ であることを証明せよ。

(2) 数列 $\{na_n\}$（ $a_n≧0$ ）が収束するとき、$\lim_{n\to\infty}nf(a_n)=0$ を証明せよ。

(3) (2)において $\lim_{n\to\infty}na_n=b$ のとき、$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^n$ を求めよ。

（早稲田大）

９．$f'(0)=a$ のとき、$\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)-f(\sin x)}{x}$ を求めよ。

（東海大）

10. 関数 $f(x)=\int_0^x(t^2+t+1)\,dt$ について、次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+4h)-f(x)}{h}$

(2) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$

（島根大）

**11.** $f(x)$は $x=0$ で微分可能で、$f'(0)=2$ である。さらに、任意の $x$ , $y$ について、$f(x+y)=f(x)+f(y)$が成り立つ。$f(x)$を決定せよ。

**12.** (1) $x$ の方程式 $x-e^{-\frac{x}{2}}=0$ はただ 1 つの実数解をもち、それは 0 と 1 の間にあることを証明せよ。

(2) 各項が正の実数である数列$\{a_n\}$が $a_1=2$ , $a_{k+1}=f(a_k)$ ( $k=1,2,3,\cdots$ ) をみたすとき、$\lim_{n\to\infty} a_n$ は、(1)の方程式の実数解に等しいことを証明せよ。ただし、 $f(x)=e^{-\frac{x}{2}}$ とする。

（神戸大）

**13.** $f(x)=e^{-x}\sin x$ ( $x>0$ ) の極値を与える点 $x$ の全体を$\{x_n \mid n=0,1,2,\cdots\}$, ただし、$x_0<x_1<x_2<\cdots$とする。$\sum_{n=0}^{\infty} f(x_n)$ を求めよ。

（早稲田大）

**14.** 次のそれぞれの級数について、収束・発散を調べよ。

(1) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$

(2) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

**15.** 数列$\{a_n\}$ ( $n=1,2,3,\cdots$ ) は、第 1 項から第 $n$ 項までの相加平均が$(2n-1)a_n$に等しいとし、$a_1=\frac{1}{3}$ とするとき、

(1) 第 $n$ 項 $a_n$ を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k$ を求めよ。

（新潟大）

**16.** $S_n = \dfrac{a}{1+a} + \dfrac{a^2}{1+a^2} + \cdots + \dfrac{a^n}{1+a^n}$ とするとき、

(1) $a \geqq 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ を示せ。

(2) $0 < a < 1$ のとき、$S_n < \dfrac{a}{1-a}$ が成り立つことを示せ。

（武蔵工大）

**17.** 正整数 $n$ に対して、$\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+3} + \dfrac{1}{2n+5} + \cdots + \dfrac{1}{2n+(2n+1)}$ を $a_n$ とおく。

$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

（群馬大）

**18.** $n$ を自然数として、次の各不等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{1}{n+1} < \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \log n + \frac{1}{2}$

（東北大）

**19.** 数列 $\{a_n\}$ ( $n = 1, 2, 3, \cdots$ ) が $a_1 = a\ (>1)$ , $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)$ によって定義されている。

(1) $a_n \leqq a_{n+1}$ および $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を証明せよ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ を求めよ。

（福井大）

解答

１．(1) 略　(2) 0

２．(1) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　(2) $-\pi$

３．平均値の定理による

４．(1) 数学的帰納法による　(2) はさみうちの原理による

５．(1) 略　(2) 0

６．(1) $\sqrt{x+1} > \log(x+1)$　(2) 1

７．(1) 略　(2) $\sqrt{e}$

８．(1) 略　(2) はさみうちの原理による　(3) $e^b$

９．$2a$

10. (1) $4(x^2 + x + 1)$　(2) $2x + 1$

11. $f(x) = 2x$

12. (1) 略　(2) 平均値の定理より 10.

13. $\dfrac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}(1+e^{-\pi})}$

14. (1) 発散　(2) 収束　(3) log 2 に収束

15. (1) $a_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$　(2) $\dfrac{1}{4}$

16. (1) ∞　(2) 略

17. $\dfrac{1}{2}\log 2$

18. (1) 面積評価による　(2) 略

19. (1) 略　(2) $\dfrac{1}{a-1}$