§３８－３　接線に関する問題

1. 曲線 $y=e^{-x}-1$ 上の、x 座標が -1 である点における接線の方程式は $y=$［ ア ］, 同じ点における法線の方程式は $y=$［ イ ］である。

（1999 神奈川工科大）

2. 曲線 $y=3^x$ 上の点 $\mathrm{P}(a, 3^a)$ における接線の方程式は $y=$［ ア ］であり、また、法線の方程式は $y=$［ イ ］である。

（2011 同志社大）

3. 曲線 $y=\frac{\log(ax)}{x^2}$ の傾き $9e^2$ の接線が原点を通るとき、正の定数 a を求めよ。

（2014 東京電機大）

4. 曲線 $x^2+2xy-2x+y-1=0$ 上の点 $(0, 1)$ における接線の方程式を求めよ。

（2005 富山県立大）

5. 曲線 $y=x^{\sin x}$ 上で、$x=\pi$ である点における接線の y 切片を求めよ。

（2006 関西大）

6. 曲線 $y=3\sin 2x+\cos 3x$ の $0<x<\pi$ の範囲にある部分の接線のうち、直線 $3x+y=0$ に平行なものの方程式を求めよ。

（1965 東京大）

7. 2 つの曲線 $y=x^2$，$y=\frac{1}{x}$ の両方に接する直線を求めよ。

（1987 群馬大）

8. 平面上の 3 つの曲線 $y=9x^2+5x+3$，$y=-3x^2+x+\frac{5}{3}$，$y=5\log(x-a)-2$ について、次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=9x^2+5x+3$ と $y=-3x^2+x+\frac{5}{3}$ の両方に接する直線の方程式を求めよ。

(2) 上の 3 つの曲線に接する直線が存在するような定数 a の値を求めよ。

（2007 三重大）

9. 2つの曲線 $y=ae^{-x}$ と $x^2+y^2=1$ との共有点が1つしかないとき、a^2 の値を求めよ。

（1989福岡大）

10. 曲線Cを $y=e^{-x}$ とする。また、C上の点P(α,β)において、Cと共通の接線をもち、かつx軸に接する2つの円を S_1, S_2，それぞれの円の中心を Q_1, Q_2 とする。

(1) 点PはC上を自由に動くものとする。2点 Q_1, Q_2 の間の距離の最小値を求めよ。

(2) 線分 Q_1Q_2 の中点をM(x,y)とする。点PがC上を動くとき、Mのえがく曲線の方程式を x, y を用いて表せ。

（1991 岡山大）

11. 関数 $f(x)=x^2e^{-2x}$ に対して、次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$の極値を求めよ。

(2) a を正の定数とする。曲線 $y=f(x)$上の点$(a, f(a))$における接線と、点$(-a, f(-a))$における接線が垂直に交わるとき、a の値を求めよ。

（2012 関西大）

12. 座標平面上に、媒介変数 θ で表された曲線 $\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ がある。この曲線上の相異なる2点P, Qでの接線が互いに直交するとき、PQの中点の軌跡を求めよ。

（1988 岐阜大）

13. 曲線C：$y=\cos x$ 上の点$(a, \cos a)$ $(a \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$における法線の方程式は $y=$［ ア ］であり、法線と x 軸の交点Pの座標は（［ イ ］, 0 ）である。したがって、交点Pと$(a, 0)$の距離は $f(a)=$［ ウ ］と表せる。もし、$\frac{\pi}{8} \leqq a \leqq \frac{\pi}{3}$であれば、距離 $f(a)$は $a=$［ エ ］のとき、最大値［ オ ］をとり、$a=$［ カ ］のとき、最小値［ キ ］をとる。

（2010 同志社大）

14. 曲線 $y=\cos x\ (0<x<\pi)$上の点P$(a, \cos a)$における法線と x 軸との交点をQとする。ただし、曲線の上の点Pにおける法線とは、Pを通り、Pにおける接線に直交する直線のことである。2点P, Q間の距離を $f(a)$とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(a)$を求めよ。

(2) $f(a) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ となるような a の値の範囲を求めよ。

（1993 龍谷大）

15. 媒介変数 θ により $\begin{cases} x = a\theta - a\sin\theta \\ y = a - a\cos\theta \end{cases}$ で表される曲線 C を考える。ただし、a は正の定数とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の点 P($at - a\sin t$, $a - a\cos t$)における接線の方程式を求めよ。ただし、$0 < t < 2\pi$ とする。

(2) 曲線 C 上の点 Q($a(t+\pi) - a\sin(t+\pi)$, $a - a\cos(t+\pi)$)における接線と、(1)で求めた接線との交点 R の座標を t を用いて表せ。ただし、$0 < t < 2\pi$ とする。

（2006 鳥取大）

16. (1) 関数 $y = (x-1)e^x$ の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、グラフを書け。ただし、$\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x = 0$ を使ってよい。

(2) 関数 $y = -e^x$ のグラフ上の点(a , $-e^a$)における接線が点(0 , b)を通るとき、a , b の関係式を求めよ。

(3) 点(0 , b)を通る、関数 $y = -e^x$ のグラフの接線の本数を調べよ。

（2008 東京電機大）

17. $f(x) = e^{-x^2}$ とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 A(a , $f(a)$)における接線を l、原点 O を通り l に垂直な直線を l' とし、l と l' との交点を P とする。

(1) 線分 OP の長さを求めよ。

(2) l と y 軸の交点を Q とし、∠POQ を θ($0 \leqq \theta \leqq \pi$)とする。$\sin\theta$ を a を用いて表せ。

(3) (2)で求めた $\sin\theta$ を最大にする a の値と、そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

（2011 岡山大）

18. a , b は実数で、$a > \sqrt{2}$ とする。xy 平面上の点(a , b)から曲線 $y = e^{-x^2}$ に接線を引くことができるための条件を求めたい。

(1) 曲線 $y = e^{-x^2}$ 上の点（ t , e^{-t^2} ）における接線の傾きと y 切片を求めよ。

(2) $f(t) = (2t^2 - 2at + 1)e^{-t^2}$ とおく。

(a) 関数 $f(t)$ の増減を調べ、極値を求めよ。

(b) $f(t)$ のとり得る値の範囲を求めよ。必要ならば、$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ を用いてよい。

(3) 点(a , b)から曲線 $y = -e^{x^2}$ に接線を引くことができるための条件を a , b を用いた式で表せ。

（2009 明治大）

解答

1．[ア]＝$-ex-1$　[イ]＝$\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}+e-1$

2．[ア]＝$3^a(\log 3)x+3^a(1-a\log 3)$　[イ]＝$-\frac{1}{3^a(\log 3)}x+\frac{a+3^{2a}\log 3}{3^a\log 3}$

3．$a=3e$

4．$y=1$

5．$1+\pi\log\pi$

6．$x=\frac{\pi}{2}$ → $y=-3x+\frac{3\pi}{2}$　$x=\frac{\pi}{3}$ → $y=-3x+\pi-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$x=\frac{2\pi}{3}$ → $y=-3x+2\pi+1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7．$y=-4x-4$

8．(1) $y=5x+3$, $y=-x+2$　(2) $a=-2$

9．$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}e^{(\sqrt{5}-1)}$

10. (1) 4　(2) $y=e^{(x-1)}+e^{-(x-1)}$

11. (1) 極大$\frac{1}{e^2}$ $(x=1)$　極小0 $(x=0)$　(2) $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$

12. $y=1$ $\left(\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3\pi}{2}\right)$

13. [ア]＝$\frac{1}{\sin a}x-\frac{a}{\sin a}+\cos a$ [イ]＝$a-\sin a\cos a$　[ウ]＝$|\sin a\cos a|$　[エ]＝$\frac{\pi}{4}$，

[オ]＝$\frac{1}{2}$，[カ]＝$\frac{\pi}{8}$，[キ]＝$\frac{\sqrt{2}}{4}$

14. (1) $f(a)=\sqrt{1-sin^4 a}$　(2) $\frac{\pi}{4}\leqq a\leqq\frac{3\pi}{4}$

15. (1) $y=\frac{\sin t}{1-\cos t}x+2a-\frac{at\sin t}{1-\cos t}$　(2) $\left(\frac{a}{2}(2t+\pi-\pi\cos t),\ 2a+\frac{a}{2}\pi\sin t\right)$

16. (1) 略　(2) $b=(a-1)e^a$　(3) $b<-1\to 0$, $b=-1\to 1$, $-1<b<0\to 2$, $b\geqq 0\to 1$

17. (1) $\frac{2a^2+1}{\sqrt{e^{2a^2}+4a^2}}$　(2) $\frac{2|a|}{\sqrt{e^{2a^2}+4a^2}}$　(3) $\sqrt{\frac{2}{e+2}}$ $\left(a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

18. (1) 傾き$-2te^{-t^2}$切片$(2t^2+1)e^{-t^2}$　(2) 略　(3)$(-\sqrt{2}a+2)e^{-\frac{1}{2}}\leqq b\leqq(\sqrt{2}a+2)e^{-\frac{1}{2}}$