§３９－２　定積分の計算

1. 次の定積分を求めよ。　$\int_0^1 \frac{x^2+2}{x+2}dx$

（2001 信州大）

2. 定数 A , B , C を$\frac{x^2+5}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$が成立するように選ぶと A = [ア] ,

B = [イ] , C = [ウ]である。したがって$\int_0^1 \frac{x^2+5}{(x+1)^2(x-2)}\ dx =$ [エ]である。

（2011 同志社大）

3. 関数$f(x) = \frac{4(x-1)}{(x^2-2)(x^2-2x+2)}$について、以下の問に答えよ。

(1) k を定数とする。方程式$f(x) = k$ の異なる実数解の個数を調べよ。
(2) $f(x) = \frac{Ax+B}{x^2-2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$ が成り立つように定数 A , B , C , D の値を調べよ。
(3) $\int_0^1 f(x)\ dx$を求めよ。

（2015 大阪教育大）

4. 次の定積分を求めよ。　$\int_0^1 x\log(x^2+1)dx$

（1999 長岡技術科学大）

5. 次の定積分を計算せよ。

(1) $\int_1^e 5^{\log x}\ dx$　　(2) $\int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\ dx$

（2003 横浜国立大）

6. 定積分 $\int_1^2 \frac{\log x}{x^3}dx$ の値を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

（2004 信州大）

7. 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 xe^x dx$　　(2) $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$　　(3) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$　　(4) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

（2004 宮崎大）

8. 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1 x(\log x)^2 dx$　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$

（2006 横浜国立大）

9. 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$　　(3) $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$

（2004 横浜国立大）

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}dx$ の値は[　　]である。

（2008 関西大）

11. 次の定積分を求めよ。　$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin x\,dx$　(n は正の整数)

（1986 北見工業大）

12. 定積分 $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx$ を求めよ。

（2007 京都大）

13. (1) $\tan\frac{\pi}{12}$の値を求めよ。

(2) $\int_0^{2(2+\sqrt{3})} \frac{16}{(x^2+4)^2}dx$を求めよ。

（2009 東京慈恵医科大）

14. 次の定積分の値を求めよ。　$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$

（1987 奈良県立医科大）

15. 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}dx$ を求めよ。

（2011 京都大）

16. 次の定積分を求めよ。 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$

（2003 琉球大）

17. 次の定積分の値を求めよ。 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|2\cos^2 x+3\sin x|dx$

（1986 高知大）

18. (1) 不定積分 $\int e^{-x}\sin 2x dx$ を求めよ。
(2) 定積分 $\int_0^{\pi} e^{-x}|\sin 2x|dx$ を求めよ。

（2008 横浜国立大）

19. n を自然数とする。定積分 $\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x}|\sin x|dx$ を求めよ。

（2006 山形大）

20. 次の定積分の値を求めよ。 $\int_1^2 \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

（1987 早稲田大）

21. 次の定積分を求めよ。 $\int_0^{\frac{\log 3}{2}} \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$

（2005 横浜国立大）

22. 関数 $f(x)$を$f(x)=\sqrt{x}\log x$とする。このとき、関数 $f(x)$の最小値は[ア]であり、変曲点の x 座標は[イ]である。さらに、定積分$\int_1^e \sqrt{x}\log x\,dx$の値は[ウ]である。

（2009 芝浦工業大）

23. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+e^x} dx$ の値を求めよ。

（1979 学習院大）

24. $\tan\frac{x}{2} = t$ とおいて、積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\ dx$ の値を求めよ。

（2011 津田塾大）

25. 次の問いに答えよ。

(1) $\frac{d}{dx}\log\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$ を求めよ。

(2) $\frac{d}{dx}\log\left(x\sqrt{4x^2+1}\right)$ を求めよ。

(3) $\int_0^1 \sqrt{4x^2+1}dx$ を求めよ。

（2010 同志社大）

解答

1．$-\frac{3}{2}+6\log\frac{3}{2}$

2．[ア] −2　[イ] 0　[ウ] 1　[エ] $-1-\log 2$

3．(1)$k=0$ のとき 1 個　$k\neq 0$ のとき 2 個 (2) A = 1 , B = 0 , C = -1 , D = 2　(3) $\frac{\pi}{4}$

4．$-\frac{1}{2}+\log 2$

5．(1) $\frac{5e-1}{\log 5+1}$　　(2) $\frac{\pi+4}{8}$

6．$\frac{3}{16}-\frac{1}{8}\log 2$

7．(1) 1　　(2) π　　(3) $\frac{1}{2}\log 2$　　(4) $\frac{\pi}{4}$

8．(1) $\frac{e^2-1}{4}$　　(2) $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$

9．(1) $\log(\sqrt{2}+1)$　　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$　　(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)$

10. $\log\frac{3}{2}$

11. $n=1 \rightarrow \pi$　$n\geqq 2 \rightarrow 0$

12. $4\sqrt{2}-4+\log(\sqrt{2}+1)$

13. (1) $2+\sqrt{3}$　　(2) $\frac{5\pi+3}{12}$

14. $\frac{1}{3}$

15. $\frac{4\sqrt{2}+8+3\sqrt{2}\pi}{48}$

16. $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$

17. $\frac{2\pi+21\sqrt{3}}{6}$

18. (1)$-\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)+C$　　(2) $\frac{2}{5}\left(2e^{-\frac{\pi}{2}}+e^{-\pi}+1\right)$

19. $\frac{1+e^{\pi}}{2e^{n\pi}}$

20. $\frac{4\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{10}$

21. $\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$

22. ア　$-\frac{2}{e}$　　イ　1　　ウ　$\frac{2}{9}(e\sqrt{e}+2)$

23. $\frac{1}{3}$

24. $\log 2$

25. (1) $\frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ (3) $\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\log(2+\sqrt{5})$