§３９－３　定積分と漸化式

1. (1) $I_n=\int_1^2(\log x)^n dx$ ($n=1,2,\cdots$)とおくとき、I_{n+1} と I_n の関係式を求めよ。
(2) 自然数 n について、次の等式を証明せよ。

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_1^2(\log x)^n dx=2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-\log 2)^k}{k!}+1$$

（1990 大分大）

2. $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$ ($n=0,1,2,\cdots$)とする。次の問いに答えよ。
(1) I_0 を求めよ。
(2) $n\geqq 1$ のとき、I_n を I_{n-1} で表せ。
(3) $a_n=e\,(n!-I_n)$ と置いて、a_n の漸化式を求めよ。
(4) I_5 を求めよ。

（2004 小樽商科大）

3. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) I_0, I_1, I_2 を求めよ。
(2) I_n を I_{n-2} で表せ。ただし、$n\geqq 2$ とする。

（2004 埼玉大）

4. n は自然数、a は $a>\frac{3}{2}$ を満たす実数とし、実数 x の関数
$f(x)=\int_0^x(x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)\ d\theta$ を考える。
ただし、$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\ d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\ d\theta$ を示せ。

(2) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ を満たす n と a の値を求めよ。

(3) (2)で求めた n と a に対して、$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

（2015 北海道大）

5. 定積分$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{(\cos x)^n}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) について次の問いに答えよ。

(1) I_0, I_{-1}, I_2 を求めよ。

(2) I_1 を求めよ。

(3) 部分積分法を用いて、$nI_n - (n+1)I_{n+2} + \left(\sqrt{2}\right)^n = 0$ が整数 n に対して成り立つことを示せ。

(4) I_{-3}, I_{-2}, I_3 を求めよ。

(5) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$ および $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$ を求めよ。

（2009 同志社大）

6. n を自然数とする。

(1) $I_n = \int_0^{\pi} sin^n \theta \, d\theta$ とおく。$n \geqq 3$ のとき、I_n を I_{n-2} で表せ。

(2) $J_n = \int_0^1 x^n (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx$ ($n \geqq 2$)とおくとき、J_n を I_n で表せ。

(3) J_6 を求めよ。

（1987 九州大）

7. n が 0 以上の整数のとき、$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$について考える。

(1) I_0, I_1 を求めよ。

(2) $n \geqq 1$ のとき、I_n を I_{n-1} を用いて表せ。

(3) (2)の結果を用いて I_3 と I_4 を求めよ。

(4) I_n を n を用いて表せ。

（2004 秋田県立大）

8. m, n を正の整数とする。このとき、定積分 $I(m, n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ に関して

(1) $I(m, 1)$を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき、$I(m, n)$を $I(m+1, n-1)$を用いて表せ。

(3) $I(m, n)$を m と n を用いて表せ。

（2004 東京電機大）

9. 負でない整数 m , n に対して、$B(m\ ,\ n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n\ dx$と定義する。

(1) B (3 , 2)を求めよ。

(2) B (m , n)を B ($m+1$, $n-1$)を使って表せ。ただし、$n \geqq 1$ とする。

(3) B (m , n)を求めよ。

(4) a , b を相異なる実数とする。このとき、$\int_a^b (x-a)^m(x-b)^n\ dx$を求めよ。

（2015 横浜市立大）

解答

1．(1) $I_{n+1} = 2(\log 2)^{n+1} - (n+1)I_n$　　(2) 略

2．(1) $1 - \frac{1}{e}$　　(2) $I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}$　　(3) $a_n = 1 + na_{n-1}$　　(4) $120 - \frac{326}{e}$

3．(1) 順に$\frac{\pi}{2}$，1，$\frac{\pi}{4}$　　(2) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

4．(1) 略　　(2) n = 1 , a = 2　　(3) $-\frac{1}{2}$

5．(1) 順に$\frac{\pi}{4}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，1　　(2) $\log(1+\sqrt{2})$　　(3)略　　(4)順に$\frac{5\sqrt{2}}{12}$，$\frac{\pi+2}{8}$，$\frac{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{2}$

(5) $\frac{\pi+2}{8}$

6．(1) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$　　(2) $J_n = \frac{1}{2^{n+1}} I_n$　　(3) $\frac{5\pi}{2048}$

7．(1) 順に1，$\frac{2}{3}$　　(2) $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$　　(3) 順に$\frac{16}{35}$，$\frac{128}{315}$　　(4) $I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

8．(1) $\frac{1}{(m+1)(m+2)}$　　(2) $I(m,n) = \frac{n}{m+1} I(m+1, n-1)$　　(3) $\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$

9．(1)$\frac{1}{60}$　　(2)$\frac{n}{m+1} B(m+1,\ n-1)$　　(3) $\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$　　(4) $(-1)^n (b-a)^{m+n+1} \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$