§５０　区分求積法

1. 次の極限値を求めよ。　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos^2\frac{k\pi}{4n}$

（2002 会津大）

2. 次の極限値を求めよ。　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

（2006 立教大）

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{k}{n}\right)^2$を求めよ。

（2004 名古屋市大）

4. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{(k^2+n^2)^2}$を求めると[　　]である。

（2012 関西大）

5. m を 2 以上の整数とするとき $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\frac{2m-1}{m}}}\sum_{k=1}^{n}k^{\frac{m-1}{m}}$の値は[　　]である。

（2014関西大）

6. 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi(n+1)}{4n}}+\frac{1}{\sin\frac{\pi(n+2)}{4n}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{\pi(n+n)}{4n}}\right\}$$

（2009 愛知教育大）

7. 次の問いに答えよ。

(1) $s>1$ のとき、定積分$\int_1^s\log x\ dx$を求めよ。

(2) 自然数 n に対し、$a_n=(n+1)(n+2)\cdots(n+n)$とおく。このとき、極限$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^{\frac{1}{n}}}{n}$の値を求めよ。

（2004 信州大）

8. n を自然数とする。xy 平面内の、原点を中心とする半径 n の円の、内部と周をあわせたものを C_n であらわす。次の条件（＊）を満たす 1 辺の長さが 1 の正方形の数を $N(n)$とする。
（＊）正方形の 4 頂点はすべて C_n に含まれ、4 頂点の x および y 座標はすべて整数である。

このとき、$\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n^2}=\pi$を証明せよ。

（2004 京都大）

9. $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{(2n+1)^2}\log\frac{n+2}{n}+\frac{n}{(2n+2)^2}\log\frac{n+4}{n}+\cdots+\frac{n}{(2n+n)^2}\log\frac{n+2n}{n}\right\}$を求めよ。

（1987 福島大）

10. $\lim_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)}{(1+2+3+\cdots+n)(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)}$を求めよ。

（1984 東京理科大）

11. 次の極限値を求めよ。　$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2+3+\cdots+n)^5}{(1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4)^2}$

（1999 上智大）

12. a を正の実数とするとき極限値$b=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^a+(n+2)^a+(n+3)^a+\cdots+(n+n)^a}{1^a+2^a+3^a+\cdots+n^a}$を求めよ。

（2010 大阪府立大）

13. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{3n(3n-2)(3n-4)\cdots(n+4)(n+2)}$を求めよ。

（1984 愛媛大）

14. 次の極限値を求めよ。　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$

（2012 防衛医科大）

15. 次の問いに答えよ。

(1) $x\geqq 0$ のとき、$x-\frac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)\leqq x$が成り立つことを示せ。

(2) 自然数に対して、$S_n=\log\left(n\sqrt{n}+1\right)+\log\left(n\sqrt{n}+\sqrt{2}\right)+\cdots+\log\left(n\sqrt{n}+\sqrt{n}\right)-n\log\left(n\sqrt{n}\right)$ と定めるとき、極限値$\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ。

（2015 大阪府立大）

16. (1) 定積分$\int_0^1 \log\frac{x+2}{x+1}\ dx$の値を求めよ。

(2) 極限値$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$を求めよ。

（2004 横浜市大）

17. n は自然数を表す。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して、不等式$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$が成り立つことを示せ。ただし、対数は自然数とする。

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^6$を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$を$a_n=\left(1+\frac{1^6}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^6}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^6}{n^6}\right)$で定めるとき、極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

（2008 広島大）

解答

1．$\frac{\pi+2}{2\pi}$

2．$\frac{\pi}{4}$

3．$\frac{61}{3}$

4．$\frac{1}{4}$

5．$\frac{m}{2m-1}$

6．$4\log\left(\sqrt{2}+1\right)$

7．(1) $1-s+s\log s$　(2) $e^{-1+2\log 2}$

8．$4\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n^2-k^2}-1\right) < N(n) < 4\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n^2-k^2}\right)$ より

9．$\frac{1}{3}\log\frac{4}{3}$

10. $\frac{5}{6}$

11. $\frac{25}{32}$

12. $2^{a+1}-1$

13. $\frac{3\sqrt{3}}{e}$

14. $\frac{256}{27e}$

15. (1) 略　(2) $\frac{2}{3}$

16. (1) $3\log 3-4\log 2$　(2) $\frac{27}{16}$

17. (1) 略　(2) $\frac{1}{6}$　(3) $e^{\frac{1}{6}}$