§５１　楕円

１．２点(3 , 0) , (− 1 , 0)からの距離の和が 12 の点の軌跡は楕円であり、その方程式は $\dfrac{(x-r)^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=1$ である。p , q , r の値を求めよ。

（2002　鹿児島大）

２．楕円 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の焦点を F(4 , 0) , F '(− 4 , 0)とし、第１象限にある楕円上の点を P とする。OP = a とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) PF + PF ' の値を求めよ。

(2) $\mathrm{PF}^2+\mathrm{PF}'^2$ および PF・PF ' を a を用いて表せ。

(3) $\angle \mathrm{F'PF}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき、a の値および点 P の座標を求めよ。

（2005　静岡大）

３．xy 平面上に円 C : $x^2+y^2=1$ と楕円 C' : $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ がある。２点 P , Q は点(1 , 0)を同時に出発し、円 C 上を正の向き（反時計回り）に回転していて、P の速さは Q の速さの２倍である。点 Q を通り x 軸に垂直な直線と楕円 C 'との交点のうち x 軸に関して Q と同じ側にある点を Q'（ただし、Q が x 軸上にあるときは Q' = Q）とするとき、線分 PQ'の長さの最大値を求めよ。

（1993　大阪府立大）

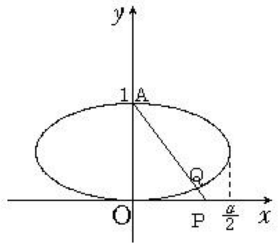
４．$a>0$ とする。C_1 を曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, C_2 を直線 $y=2ax-3a$ とする。

(1) 点 P が C_1 上を動き、点 Q が C_2 上を動くとき、線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$とする。$f(a)$を a を用いて表せ。

(2) 極限値 $\lim\limits_{a\to\infty} f(a)$ を求めよ。

（2012　大阪大）

5．長軸 a（$a>1$），短軸1の楕円が図に示す位置にあり、点 P が原点から一定の速さ v で x 軸上を正の向きに動く。このとき、頂点 A と点 P を結ぶ直線が楕円と再び交わる点を Q とすると、線分 AQ の長さは時間とともにどのように変化するかをグラフで示せ。



（1998 お茶の水大）

6．直線 $y=2x+k$（k は実数）と、楕円 $4x^2+9y^2=36$ について

(1) 両者が異なる 2 点で交わるための条件を求めよ。

(2) 2 つの交点を結ぶ線分の長さが 4 となるとき、k の値を求めよ。

（1991 岩手大）

7．$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$（$x>0$，$y>0$）上の動点 P における接線と、x 軸, y 軸との交点をそれぞれ Q , R とする。このとき、線分 QR の長さの最小値と、そのときの点 P の座標を求めよ。

（2008 信州大）

8．楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点で、$x\geqq 0$ の範囲にあり、定点 A(0 , − 1)との距離が最大となる点を P とする。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 点 Q は楕円 C 上を動くとする。△APQ の面積が最大となるとき、点 Q の座標および△APQ の面積を求めよ。

（2004 筑波大）

9．O を原点とする座標平面における曲線 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上に、点 $P\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。

(1) C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。

(2) 点 Q が C 上を動くとき、△OPQ の面積の最大値と、最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。

（2012 岡山大）

10. 楕円$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$上に、$x_1>0$, $y_1>0$ となるような点 P(x_1 , y_1)をとる、点 P における楕円の接線を l_1 , 法線を l_2 とする。

(1) 接線 l_1 と法線 l_2 の方程式をそれぞれ求めよ。

接線 l_1 が x 軸と交わる点を Q とし、法線 l_2 が x 軸と交わる点を S , y 軸と交わる点を R とする。

(2) 線分 SQ の長さが最小となるように点 P を定める。このとき、△PSQ の面積を求めよ。

(3) 原点を O とし、△OSR の面積が最大となるように点 R を定める。このとき、△OSR の面積を求めよ。

（2007 東京理科大）

11. $a>0$ とする。座標平面において、点 P(1 , 3)から楕円$ax^2+\dfrac{y^2}{2a}=1$に引いた 2 本の接線の交点を Q , R とする。

Q , R はともに、直線[ア] x + [イ] y = 1 の上にある。線分 QR の中点を M とすると、M の座標は（[ウ], [エ]）であり、M は直線 y =[オ] x 上にある。線分 PQ の長さと線分 PR の長さが等しくなるのは a =[カ]のときである。

O を原点とする△PQR の面積 S_1 と△OQR の面積 S_2 の比 $\dfrac{S_1}{S_2}$ を a を用いて表すと $\dfrac{S_1}{S_2}$ = [キ]である。$a>0$ の範囲で a を変化させると、比 $\dfrac{S_1}{S_2}$ は a =[ク]のとき最小値[ケ]をとる。

（2011 立命館大）

12. 実数 x , y がを満たしながら変化するとき、(x - 1) 2 + 4(y - 1) 2 の最大値は[ア]であり、最小値は[イ]である。

（2018 関西大）

13. 楕円$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$上を点 P(x , y)が 1 週するとき、$3x^2+\sqrt{3}xy+2y^2$ の最大値・最小値と、それらを与える点 P の座標を求めよ。

（1993 武蔵工大）

14. 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$x>0$, $y>0$ は定数）に内接し、辺 AB が x 軸に平行である長方形 ABCD を考える。頂点 A は第 1 象限内の点とする。次の文中の[　　]に適する a , b の式を記せ。

(1) この楕円の面積は[ア]である。

(2) 長方形 ABCD の面積 S の最大値は[イ]であり、そのときの頂点 A の座標は（[ウ], [エ]）である。

(3) 長方形 ABCD の周の長さ s の最大値は[オ]であり、そのときの頂点 A の座標は（[カ], [キ]）である。

(4) 長方形 ABCD を y 軸のまわりに回転させてできる円柱の体積を V とする。V の最大値は[ク]であり、そのときの頂点 A の座標は（[ケ], [コ]）である。

（2005 同志社大）

15. xy 平面上に曲線 C_1 がある。C_1 は $3x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2=24$ で表される曲線である。

(1) C_1 を、原点を中心に反時計回りに 30°だけ回転して得られる曲線 C_2 の方程式を求めよ。

(2) 点(1 , 3)から C_2 に引いた接線の方程式を求めよ。

(3) C_2 の外部の点 P から引いた 2 本の接線が直交する場合の点 P の軌跡を求めよ。

(4) C_1 の外部の点 Q から引いた 2 本の接線が直交する場合の点 Q の軌跡を求めよ。

（2007 豊橋技術科学大）

16. 一般項が $a_n=\dfrac{27}{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の、初項から第 n 項までの和を b_n とするとき、次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{43}{2}-b_n\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{81}{10}+b_n\right)^2}=1$ の面積を S_n で表すとき、S_n が最大になる自然数 n と、そのときの S_n の値を求めよ。

（2011 大阪教育大）

17. 放物線 $x=y^2$ の $y>1$ の部分に点 P をとる。点 P から楕円 $2x^2+y^2=2$ に引いた 2 本の接線が垂直に交わるとき、点 P の x 座標を求めよ。

（2008 和歌山大）

解答

１．$(p, q, r) = (36, 32, 1)$

２．(1) 10　(2) $\mathrm{PF}^2 + \mathrm{PF}'^2 = 2(a^2+16)$, $\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PF}' = 34 - a^2$

(3) $a = \sqrt{22}$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{5\sqrt{13}}{4}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

３．$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

４．(1) $f(a) = \dfrac{(3-\sqrt{5})a}{\sqrt{1+4a^2}}$　(2) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

５．略

６．(1) $-2\sqrt{10} < k < 2\sqrt{10}$　(2) $k = \pm\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

７．$\mathrm{QR} = 3$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

８．(1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$　(2) $\dfrac{9}{4}$

９．(1) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{4}x \mp \dfrac{1}{2}y = 1$　(2) $\triangle\mathrm{OPQ} = 1$, $\mathrm{Q}\left(\pm\sqrt{3}, \mp\dfrac{1}{2}\right)$

10. (1) $l_1 : 9x_1x + 4y_1y = 1$, $l_2 : 4x_1x - 9y_1y = 1$　(2) $\triangle\mathrm{PSQ} = 3$　(3) $\triangle\mathrm{OSR} = \dfrac{25}{24}$

11. ア a　イ $\dfrac{3}{2a}$　ウ $\dfrac{2a}{9+2a^3}$　エ $\dfrac{6a}{9+2a^3}$　オ 3　カ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　キ $\dfrac{9+2a^2-2a}{2a}$

ク $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　ケ $3\sqrt{2}-1$

12. ア $21+8\sqrt{5}$　イ $21-8\sqrt{5}$

13. 最大値 21 , $\mathrm{P}\left(\pm 1, \mp\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$　最小値 9 , $\mathrm{P}\left(\mp\sqrt{3}, \pm\dfrac{3}{2}\right)$

14. ア πab　イ $2ab$　ウ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$　エ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$　オ $4\sqrt{a^2+b^2}$　カ $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

キ $\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$　ク $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^2 b}{9}$　ケ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$　コ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}b$

15. (1) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{4} = 1$　(2) $y = -x + 4$,　$y = \dfrac{5}{11}x + \dfrac{28}{11}$　(3) $x^2 + y^2 = 16$　(4) $x^2 + y^2 = 16$

16. (1) $b_n = \frac{81}{10}\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)\right\}^n$ (2) $n = 4$, $S_4 = 219\pi$

17. $x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$