◆　関数の極限

１．a , b を定数とする。等式 $\lim_{x \to 2} \dfrac{a\sqrt{x+1}-b}{x-2} = \sqrt{3}$ が成り立つとき、$a =$ [ア], $b =$ [イ] $\sqrt{[\text{ ウ }]}$ である。

（2019 国士舘大）

２．$\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\tan\theta - \sin\theta}{\theta^3}$ の値は[ア]である。

（2019 東海大）

３．$\lim_{x \to \frac{1}{4}} \dfrac{\tan(\pi x) - 1}{4x-1}$ の値は[ア]である。

（2019 立教大）

４．次の極限を調べよ。

(1) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3^{x-1} + 4^{x+1}}{2^{x+1} - 4^{x-1}}$　　(2) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right)^{3x}$

（2019 茨城大）

５．$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3-2x} - \sqrt{3+2x}}{x}$ を求めよ。

（2019 愛媛大）

６．$\lim_{t \to \infty} \dfrac{2^{-\frac{t}{2}} + 2^{-\frac{t}{30}}}{2^{-\frac{t}{30}}}$ を求めよ。

（2018 福島大）

７．$\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1+3x}{1-4x}\right)^{\frac{1}{x}} =$ [ア]である。

（2018 山梨大）

８．定数 a に対し、次の極限が有限の値をとるとき、極限値はいくらか。

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+a} - 3}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}}$$

（2018 防衛医科大）

９．$\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2}{(3^x - 1)\sin x}$ の値は[ア]である。

（2018 産業医科大）

10. $\lim_{x\to 4}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-4}=2$ が成り立つような定数 a , b の値は、$a=$ [ア], $b=$ [イウエ]である。

（2018 神奈川大）

11. a を実数の定数とする。関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{ax-4}-9}{x-5}$ が $x\to 5$ のとき収束するように a の値を定めると、$\lim_{x\to 5}f(x)=\dfrac{[\,アイ\,]}{[\,ウエ\,]}$ である。

（2018 藤田医科大）

12. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ であることを用いて、次の極限値を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^4}\{\log(x^3+x^3)-\log x^2\}$$

（2017 岩手大）

13. 次の極限を調べよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-x}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(3^x-\sqrt{9^x-3^x}\right)$

（2017 茨城大）

14. 極限 $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x}-x}{x+1}$ を求めよ。

（2017 愛媛大）

15. $x>0$ に対して、$\lim_{h\to 0}\dfrac{\log(x+2h)-\log x}{\sin h}$ を求めよ。

（2017 東京電機大）

16. 極限値 $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x^3}$ を求めよ。

（2017 東京都市大）

17. a , b を正の実数とするとき、極限 $\lim_{x\to\infty}x\sin x\left(\sqrt{a^2x^2+b}-ax\right)$ を求めよ。

（2017 学習院大）

18. 定数 k に対して、極限 $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos 3\theta+k\cos 2\theta}{4\cos^2\dfrac{\theta}{2}-3}$ が有理数の値となるのは $k=$ [アイ]のときであり、このときの極限値は[ウエ]である。

（2017 杏林大）

19. 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}=(3,4)$, $\vec{a}=(1.2)$に対して、関数$f(t)$を

$$f(t)=\frac{1}{t}\left(\frac{1}{|\vec{a}-t\vec{b}|}-\frac{1}{|\vec{a}+t\vec{b}|}\right)\quad (t \text{ は } 0 \text{ と異なる実数})$$

と定める。このとき、$\lim_{t\to 0} f(t)=\dfrac{[\text{アイ}]}{[\text{ウエオ}]}$である。

（2017 東京医科大）

20. 次の等式$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+ax}+b}{x^2-4}=\frac{1}{4}$が満たされるとき、実数 a, b の値を求めよ。

（2017 兵庫医科大）

21. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+4^x}{3^x+4^x}$の極限を求めよ。

（1999 東京電機大）

22. $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3}{\tan\theta-\sin\theta}$の極限値を求めよ。

（1987 小樽商大）

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$の極限値を求めよ。

（2002 東海大）

24. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\cos 3x-\cos x}$の極限値を求めよ。

（1988 大阪産大）

25. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=$[ア]であり、$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-3\sin x}{2x+\sin x}=$[イ]である。

（2006 大阪工大）

26. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2\cos x)}{x-\frac{\pi}{2}}$の値は[ア]である。

（2015 関西大）

27. $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}$を求めよ。

（2004 早稲田大）

28. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$である。$a>0$のとき、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x^2}\right)^{x^2}$を求めよ。

（1987 大阪工大）

29. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\log_2(1+x)}{x}$ の極限値を求めよ。

（2002 会津大）

30. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{x\sin 3x}-1}{x\log(1+x)}$ を求めよ。

（1991 芝浦工大）

31. $\lim_{x \to -\infty} (3x+1+\sqrt{9x^2+4x+1})$ の極限を求めよ。

（1988 小樽商大）

32. $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})$ の極限を求めよ。

（2004 宮崎大）

33. $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{7-x}}{\sqrt{(1+x)(3-x)}-\sqrt{(1-x)(1-2x)}}$ の極限値を求めよ。

（2003 奈良県立医大）

34. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}+x\right)=-1$ が成り立つように、定数 a , b の値を定めよ。

（1987 神戸商船大）

35. $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{a+\cos x}-b}{(x-\pi)^2}=\dfrac{1}{4}$ となるように定数 a , b を定めよ。

（1986 お茶の水大）

36. 次の極限が有限の値となるように定数 a , b を定め、そのときの極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}$$

（2002 大阪市大）

37. 平行四辺形 ABCD において､辺 AB の長さを p, 辺 BC の長さを q とし､$\theta=\angle\mathrm{BAD}$ とおく。ただし $p>q$ とする。平行四辺形 ABCD の内部の点 P と 4 本の直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときの r の最大値を R とし、最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 ABCD 内に L を図示せよ。

(2) 半径 R の円の中心が L 上を動くとき、円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。S を p , q および θ で表せ。

(3) 平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2)で求めた S に対して $\lim_{\theta \to +0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

（2019 新潟大）

38. n は 3 以上の自然数とする。面積 1 の正 n 角形 P_n を考え、その週の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。

(1) $(L_n)^2$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \to \infty} L_n$ を求めよ。

（2019 早稲田大）

39. 座標平面上に点 O(0 , 0) , A(0 , 1) , B(− 1 , 1) , C(− 1 , 0) , P(t , 0)がある。ただし、t は正の実数である。また、線分 OA 上の点および線分 BC 上の点を通る直線 $l : y = ax + b$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 直線 l が正方形 OABC の面積を 2 等分するとき、a を b を用いて表せ。

(2) 直線 l が正方形 OABC の面積を 2 等分し、さらに直角三角形 OAP の面積を 2 等分する時、b を t を用いて表せ。

(3) $t \to +0$ および $t \to \infty$ のときの(2)で求めた b の極限値をそれぞれ求めよ。

（2018 新潟大）

40. 座標平面上に A(0 , 3) , B(b , 0) , C(c , 0) , O(0 , 0)がある。ただし、$b < 0$, $c > 0$, $\angle$BAO = 2$\angle$CAO である。$\angle$BAC = θ, $\triangle$ABC の面積を S とすると、$\lim_{\theta \to 0} \frac{S}{\theta}$ はいくらか。

(1) $\frac{7}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) $\frac{13}{2}$ (5) 左の 4 つの答えはどれも正しくない。

（2017 防衛医科大）

41. 座標平面上の曲線 C： $y = \sqrt{x}$ ($x \geqq 0$)を考える。C 上の異なる 2 点 P(p , $\sqrt{p}$) , Q(q , $\sqrt{q}$)($p > 0$, $q > 0$)における、それぞれの法線 l_1 , l_2 を考える。法線 l_1 , l_2 の交点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を p と q で表せ。

(2) q が p に限りなく近づくとき、線分 RP の長さの極限値を p で表せ。

（2017 九州大）

◆　微分の計算

１．関数 $y=\dfrac{\sin x+2\cos x}{2\sin x-\cos x}$ を微分しなさい。

（2019 福島大）

２．関数 $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ の $x=2$ における微分係数 $f'(2)$ を求めよ。

（2019 茨城大）

３． $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ のとき、 $f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

（2019 昭和大）

４．関数 $f(x)=e^{2x}$, $g(x)=\log x$ に対して、極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{g(x+4h)-g(x)}{f(x+2h)-f(x)}$ を求めよ。

（2019 東京電機大）

５．n を正の整数とし、 $f_n(x)=e^{-x}\left(1+\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$ とおく。このとき、第 2 次までの導関数 $f_n'(x)$ と $f_n''(x)$ を求めよ。

（2019 旭川医科大）

６．a , b は正の実数とする。関数 $y=(x-b)\sqrt{2x-a}$ について、$y'=0$ となる x の値を求めよ。

（2019 岩手大）

７．点 O を原点とする xy 平面上に点 A (1 , 0) と y 軸上を動く点 P (0 , $p(t)$) がある。$\angle\mathrm{OAP}=\theta(t)$ とするとき、以下の問いに答えよ。ただし、$t>0$, $p(t)>0$ とする。

(1) $p(t)$ を、$\theta(t)$ を用いて表せ。

(2) $\dfrac{d\theta(t)}{dt}$ を、 $\dfrac{dp(t)}{dt}$ と $\theta(t)$ を用いて表せ。

（2019 福島大）

８． $f(x)=e^x\cos(\sqrt{3}x)$ とし、その第 n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ と書く。

$f^{(2)}\left(\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)=Ae^{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$,　$f^{(10)}\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\right)=Be^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ （ A , B は定数）と表すとき、$A=$ [ア], $B=$ [イ] である。

（2019 山梨大）

９．媒介変数表示 $x = \sin t$, $y = (1 + \cos t)\sin t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。このとき、$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

（2019 神戸大）

10. 関数 $f(x) = \log(\log x)$ の $x = e^2$ における微分係数 $f'(e^2)$ を求めよ。

（2019 愛媛大）

11. 関数 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+3x^2}}$ の導関数は、$f'(x) = \dfrac{[\quad]}{(4+3x^2)^{\frac{3}{2}}}$ である。

（2019 宮崎大）

12. 微分の定義にしたがって、関数 $y = \sin x$ の導関数を求めよ。

（2019 福島県立大）

13. 関数 $f(x) = e^{ax}\sin bx$ (a , b は実数, $b \neq 0$) について、$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$ がすべての x について成立するとき、$a^2 + b^2$ の値を求めよ。

（2019 自治医科大）

14. $f(x) = -2x(\log x)^2 + 3x\log x\ (x > 0)$ とするとき、$f'(x)$, $f''(x)$ を求めよ。また、$f'(x) = 0$ となる x の値、$f''(x) = 0$ となる x の値をそれぞれ求めよ。

（2019 法政大）

15. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ のとき、$f'(\log 5) = \dfrac{[\text{ア}]}{[\text{イウ}]}$ である。

（2019 藤田医科大）

解答

微分の計算

１． $-\dfrac{5}{(2\sin x - \cos x)^2}$

２． $\dfrac{5}{9}$

３． $-\dfrac{2}{3}$

４． $\dfrac{1}{xe^{2x}}$

５． $f'(x) = -e^{-x} \cdot \dfrac{x^n}{n!}$　　　$f''(x) = e^{-x} \cdot \dfrac{x^{n-1}(x-n)}{n!}$

６． $x = \dfrac{a+b}{3}$

７． (1) $p(t) = \tan\theta(t)$　　(2) $\dfrac{d\theta(t)}{dt} = \dfrac{dp(t)}{dt} \cdot \cos^2\theta(t)$

８． ア　−4　イ　512

９． $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\cos t + 1)(2\cos t - 1)}{\cos t}$　　$\dfrac{d^2 y}{dx^2} = -\dfrac{\sin t(2\cos^2 t + 1)}{\cos^3 t}$

10. $\dfrac{1}{2}e^{-2}$

11. 4

12. 略

13. 2

14. $f'(x) = (1 - \log x)(3 + 2\log x)$　　$f''(x) = -\dfrac{4\log x + 1}{x}$

$f'(x) = 0$ の解　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ 、e　　$f''(x) = 0$ の解　$\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$

15. $\dfrac{[\text{ア}]}{[\text{イウ}]} = \dfrac{5}{36}$