整式の因数

１．実数 a , b に対し、$f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = f(f(x))$とする。このとき、$g(x) - x$ は $f(x) - x$ で割り切れることを示せ。

２．x の 3 次式

$$f(x) = ax^3 + (a^2 + b)x^2 + (2ab + c)x + a^2 + b^2 - a$$

$$g(x) = ax^3 + (a^2 - b)x^2 + (a - 1)x + c^2 - b^2$$

および x の 2 次式 $h(x) = x^2 + ax + b$ を考える。(a , b , c は定数, $a \neq 0$) $f(x)$, $g(x)$はともに $h(x)$で割り切れるか。または、ともに $h(x)$で割り切れないかのいずれかであることを示せ。

（京都大）

３．有理数を係数とする x の整式 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ について、次のおのおのの場合 b . c を a で表せ。

(1) $P(x)$は $x + 2 + \sqrt{3}$ で割り切れる。

(2) $P(x)$は $2x + 1 - i$ で割り切れる。

４．$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$,　$g(x) = f(f(f(x)))$とする。このとき、整式 $g(x)$は $f(x)$で割り切れることを証明せよ。

５．x についての恒等式 $P(x)(x - 1) + Q(x)(x^2 + 1) = 1$ を満たす多項式 $P(x)$, $Q(x)$について、次の問いに答えよ。

(1) $P(x)$が 1 次式のとき、$P(x)$, $Q(x)$を求めよ。

(2) 上の恒等式を満たす多項式 $P(x)$, $Q(x)$はどのように表されるか。

解答　（指針）

１．$g(x)-x=\{f(x)\}^2+af(x)+b-x=\{f(x)\}^2-x^2+x^2+af(x)-ax+ax+b-x$

$=\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}+a\{f(x)-x\}+x^2+ax+b-x$

$=\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}+a\{f(x)-x\}+f(x)-x$

$=\{f(x)-x\}\{f(x)+x+a+1\}$

２．$f(x)=ax^3+(a^2+b)x^2+(2ab+c)x+a^2+b^2-a$

$=ax^3+a^2x^2+bx^2+2abx+cx+a^2+b^2-a$

$=ax(x^2+ax+b)+b(x^2+ax+b)+cx+a(a-1)$

$g(x)=ax^3+(a^2-b)x^2+(a-1)x+c^2-b^2$

$=ax^3+a^2x^2-bx^2+ax-x+c^2-b^2$

$=ax(x^2+ax+b)-b(x^2+ax+b)+(a-1)x+c^2$

３．(1) $b=4a-15$, $c=a-4$

(2) $b=a-\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{a-1}{2}$

４．$f(x)=x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x+1)(x-2)$より、$f(1)=f(-1)=f(2)=0$

$g(1)=f(f(f(1)))=f(f(0))=f(2)=0$

$g(-1)=f(f(f(-1)))=f(f(0))=f(2)=0$

$g(2)=f(f(f(2)))=f(f(0))=f(2)=0$

以上より$g(x)$は $(x-1)(x+1)(x-2)$の因数を持つ。

５．(1) $P(x)=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$, $Q(x)=\dfrac{1}{2}$

(2) $\begin{cases} P(x)=-\dfrac{1}{2}(x+1)-(x^2+1)R(x) \\ Q(x)=\dfrac{1}{2}+(x-1)R(x) \end{cases}$　　　$R(x)$は任意の多項式