数と式の基本感覚

１＿ＡＡＢ． 次の式を因数分解せよ。

(1) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(2) $abc+a^2b-ab^2-a+b-c$

(3) $p^4+p^2-2ap-a^2+1$

（順に、岐阜女子大、東海大、札幌大）

２＿Ａ． 次の等式が x についての恒等式となるように定数 a , b , c の値を求めよ。

$$\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{(x+2)^2}+\frac{3x^2}{(x+2)^3}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x+2)^2}+\frac{c}{(x+2)^3}$$

（久留米工大）

３＿Ａ． 次の等式が x についての恒等式になるように、0 でない定数 a , b , c , d の値を求めよ。

$$\left(a+\frac{12}{x+1}-\frac{b}{x+3}\right)\left(c+\frac{d}{x+5}-\frac{12}{x+7}\right)=1$$

（摂南大）

４＿ＡＡ． (a)のとき、(b)の値を求めよ。

(1)　(a)　$x=\sqrt{3-\sqrt{8}}$　　(b) x^4+2x^3-2x-1

(2)　(a)　$x=\dfrac{-13+\sqrt{141}}{2}$　　(b) $x^5+12x^4-5x^3+6x^2+7x+5$

（順に、東海大、城西大）

５＿ＢＢ． (a)のとき、(b)の値を求めよ。

(1)　(a) x が実数でなく、$x^3+\dfrac{1}{x^3}=2$　　(b)　$x+\dfrac{1}{x}$　,　$x-\dfrac{1}{x}$

(2)　(a)　$\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=0$　　(b) a^5

（順に、川崎医大、久留米工大）

６＿Ｂ． $\alpha^2-\alpha+1=0$ のとき、

(1)　α^3+1 の値を求めよ。

(2) $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n=0$ となる正の整数 n を求めよ。

（関西大）

7＿ＡＡ．(a)のとき、(b)の式の値を求めよ。

(1)　(a)　$\alpha = 1+\sqrt{5}i$, $\beta = 1-\sqrt{5}i$　　　　　(b)　$\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\alpha^2}{\beta}$

(2)　(a) $x+y+z=9$, $xy+yz+zx=18$, $xyz=27$

(b)　$\dfrac{(y+z)^2}{x}+\dfrac{(z+x)^2}{y}+\dfrac{(x+y)^2}{z}$

（順に、武蔵大、東洋大他）

8＿Ｂ．$a=\sqrt[3]{2+\dfrac{10\sqrt{3}}{9}}$, $b=\sqrt[3]{2-\dfrac{10\sqrt{3}}{9}}$ のとき、$a+b$ を簡単にせよ。

（中部大）

9＿Ｂ．正の実数 x , y について、$x*y=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$ と定義するとき、

$\dfrac{xy+yz}{x+y+z}$ ，$\dfrac{xzw+yzw}{xz+yz+xw+yw+zw}$ をそれぞれ記号＊と＋を使って表せ。

（専修大）

10＿Ｂ．a , b , c , d は 0 でない実数で、$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{d}$ を満たすものとする。

このとき、$ab+bc+cd=3ad$ であることを証明せよ。

（甲南大）

11＿Ａ．(1)　$\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{50}-\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{50}$ を簡単にせよ。

(2)　$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ について α^{100} の値を求めよ。

（順に、常葉学園大、帝塚山大）

12＿Ｂ．α と β は正の定数とし、$\left(\dfrac{\sqrt{\beta}}{1+\alpha i}\right)^4=-1$ が成り立つならば、$\alpha=$［　　］，$\beta=$［　　］

であり、$\left(\dfrac{-\sqrt{\beta}}{1-\alpha i}\right)^{1992}=$［　　］である。

（西南学院大）

13＿Ａ．複素数式 $z=a+bi$, $z^3=i$ をみたすとき、実数 a , b を求めよ。

（青山学院大）

14＿A．(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$21^2+22^2+23^2+24\ 2=25^2+26^2+27^2$$

(2) このように連続する 4 つの自然数の 2 乗の和がそれに続く 3 の自然数の 2 乗の和等しくなるような場合は、この場合しかないことを示せ。

(3) 連続する 5 つの自然数の 2 乗の和が、それに続く 4 つの自然数の 2 乗の和に等しくなるような場合はどんな場合か。

（桐蔭学園横浜大）

15＿C．n を自然数、$\sqrt{n}$ を無理数とするとき、$\sqrt{n}$ の整数部分を m とおく。このとき、$\dfrac{m^3+(\sqrt{n}-m)^3}{\sqrt{n}-m}$ が有理数ならば、n は 6 か 24 であることを証明せよ。

（立命館大）

16＿C．(1) $D=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ のとき、x を D を用いて表せ。

(2) 自然数 n が平方数でないとき、$\sqrt{n}$ は無理数であることは既知として、自然数 x に対して(1)の D は有理数でないことを証明せ。

（立命館大）

解答

１．(1) $(b-c)(a-b)(a-c)$　　(2) $(ab-1)(a-b+c)$

(3) $(p^2+p+1+a)(p^2-p+1-a)$

２．$a=6\,,b=-16\,,c=12$

３．$a=1\,,b=4\,,c=1\,,d=4$

４．(1) $4-4\sqrt{2}$　　(2) 5

５．(1) 順に$-1\,,\pm\sqrt{3}i$　　(2) 1

６．(1) 0　　(2) $n=6k+5$

７．(1) $-\dfrac{14}{3}$　　(2) 9

８．2

９．順に$(x+y)*y\,,((x+y)*z)*w$

10. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{d}=k$ とおく。

$k=0\to a=b=c=d$ で自明

$k\neq 0\to ab=\dfrac{b-a}{k}$ より

11. (1) $2i$　　(2) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

12. 順に$1\,,2\,,1$

13. $(a\,,b)=(0\,,-1)\,,\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\dfrac{1}{2}\right)$

14. (1)(2) $(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$ より

(3) $36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$

15. 通分後の分子は$n^2+(3m^3-2mn)\sqrt{n}$ となり、有理数になるためには$3m^2=2n$

ここで、$m<\sqrt{n}<m+1$より、$m<\sqrt{6}+2<5$　よって$m=2\,,4$

16. (1) $x=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{D}-D\right)^2$

(2) D を有理数とすると、$x+1=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{D}-D\right)^2+1=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{D}+D\right)^2$ より

$\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{D}+D\right),\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{D}-D\right)$なとり、共に有理数となり不適である。