線形結合と基底の考え方

１．四面体 ABCD において、AD を 1 : 2 に内分する点を L , AB の中点を M , CD の中点を N とする。平面 LMN と直線 BC の交点を K とするとき、BK : KC を求めよ。

２．空間内に線形独立なベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ がある。

(1) 任意のベクトル $\vec{x}$ は $\vec{x} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ……… ① の形に一意的に書けることを示せ。

このとき、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ なる数の組を $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ と基底とするの座標ベクトルという。

(2) 原点 O を固定し、ベクトル $\vec{x}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \vec{x}$ なる点 X を同一視する。このとき、

$\vec{x} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ……… ② がある平面 α 全体を動くとき、すなわち

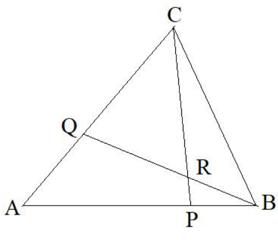
$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{q} + s\vec{r}$ $(\vec{p} \neq \vec{q})$ とパラメータが表示されるとき、x, y, z は

$\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz} = \mathrm{D}$ ……… ③ なる式をみたすことを示せ。

(3) (2)の事実を利用して問題１を解け。

３．△ABC において、AP : PB = 3 : 1 , AQ : QC = 2 : 3

でるとき、$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となる x, y を求めよ。



４．三角形 ABC がある。BC と平行な動直線を l とする。l と線分 AB , AC の交点を P , Q とし、BQ , CP の交点を R とするとき、R の軌跡を求めよ。

５．パラメータ表示された曲線 C： $x = t + e^{\frac{t}{e}}$, $y = -t + e^{\frac{t}{e}}$ $(-\infty < t < \infty)$ は x 軸と接している。2 直線 $y = 0$, $y = x$ および曲線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答

１．BK：KC = 1：2

２．(1),(2) 略　(3) BK：KC = 1：2

３． $x = \dfrac{9}{14}, t = \dfrac{1}{7}$

４．BC の中点と A を結ぶ線分を描く

５．$e^2 - 2e$