日々の演習

必須手法の紹介

１．半径 $2\sqrt{3}$ の円 C 上に 2 定点 A , B があり、AB = 6 であるとする。点 P を円 C 上の動点とするとき、次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が円 C の中心を通るとき、内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めよ。

(2) 点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=18$ を満たすとき、∠PAB の大きさを求めよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の最大値および最小値を求めよ。

（相模工大）

２．座標空間の 3 点 A(1 , 1 , 1) , B(2 , 1 , 2) , C(1 , 2 , 2)に対し、次の問いに答えよ。
(1) 3 点 A , B , C を含む平面の方程式を求めよ。
(2) △ABC は正三角形であることを示せ。
(3) △ABC の重心の座標を求めよ。
(4) △ABC を一つの面とする正四面体の他の頂点の座標を求めよ。

（帝京技科大）

３．空間に 2 直線 $l_1 : \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{3}$, $l_2 : x-1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ がある。l_1 上の任意の 1 点 P と、l_2 上の任意の 1 点 Q を結ぶ線分 PQ の中点の集合は、どんな図形となるか。

（奈良教育大）

４．二つの平面 $2x+3y+4z+5=0$, $4x+2y+3z+1=0$ の交線を l とする。
(1) l を含み、点(1 , 1 , 2)を通る平面の方程式は[　　]である。
(2) l を含み、平面 $4x+10y+13z=0$ に垂直な平面の方程式は[　　]である。

（東京理科大）

５．xyz 空間に点 E(0 , − 3 , 1)がある。xy 平面上の円 $x^2+(y-3)^2=1$ の周上を動く点 P と点 E とを通る直線が zx 平面と交わってできる点の軌跡を x , z を用いて表せ。

（大阪教育大）

６．行列 $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。

(1) $A\begin{pmatrix}2\\ x\end{pmatrix}=p\begin{pmatrix}2\\ x\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}2\\ y\end{pmatrix}=q\begin{pmatrix}2\\ y\end{pmatrix}$, $p>q$ を満たす実数 p , q , x , y を求めよ。

(2) A^n を求めよ。

（名古屋工大）

７．行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ が $a+d=2$, $ad-bc=1$ かつ $b\neq 0$ を満足しているとき、

$A^2=[\quad]A+[\quad]E$, $A^n=[\quad]A+[\quad]E$, $(A^{-1})^n=[\quad]A+[\quad]E$

（慶応大）

８．行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ の定める一次変換を f とする（ただし、$ad-bc\neq 0$ とする）。直線 l の一次変換による像を $f(l)$ で表す。いま、原点を通る相異なる 3 直線 l_1 , l_2 , l_3 があって、各 $i=1$, 2 , 3 について l_i と $f(l_i)$ とが互いに直交しているとする。このとき、任意の直線とその直線の f による像とは互いに直交することを示せ。

（京都府立医科大）

９. 行列 A によって表される 1 次変換 f が、直線 $y=x-1$ を直線 $y=2x+1$ の上に移し、直線 $y=2x+1$ を直線 $y=x-1$ の上に移すものとする。

(1) 行列 A を求めよ。

(2) 1 次変換 f によって自分自身に移される直線をすべて求めよ。

（長崎総科大）

10. 平面上の各点を、直線 $y=\dfrac{x}{3}$ に関して対称な点に対応させる 1 次変換を f とすると、f は行列［　］で表される。また、原点のまわりの回転角 $\dfrac{\pi}{4}$ による回転で表される 1 次変換を g とすると、合成変換 $f\cdot g$ は行列［　］で表され、これは直線［　］に関する対称移動を表している。

（大阪産業大）

11. a は正の実数とし、行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -a \\ a & 1\end{pmatrix}$ に対して、A^3 で表される 1 次変換を f とする。

f が直線 $l : y=x$ の点を l の点に移すとき、
(1) a の値を求めよ。
(2) 自然数 n に対して、A^n を求めよ。

（岡山大）

12. 行列 $A=\begin{pmatrix}a+1 & b+1 \\ a+4 & 3b-1\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f によって、直線 $3x+4y=0$ 上のすべての点が点 O(0 , 0)に移されるとする。
(1) a , b の値を求めよ。
(2) 平面全体は f によって、直線[　　]に移される。
(3) f によって、点(1 , 2)に移される直線の方程式は[　　]である。
(4) 円$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ は f によって、2 点 P ([　　], [　　]), Q([　　], [　　])を結ぶ線分に移される。

（慶応大）

13. a , b , c , d は実数で、$|a|\leqq 2$, $|b|\leqq 2$, $|c|\leqq 2$, $|d|\leqq 2$, $a+b=1$, $c+d=1$ を満たすとする。このとき、$ac+bd$ のとり得る値の範囲を求めよ。

（名城大）

14. 点 P は第 1 象限にあって、だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$, $b>0$)上を動くものとする。
原点を O , だ円の 2 つの頂点を A(a , 0) , B(0 , b)とするとき、
(1) 四角形 OAPB の面積を最大にする点 P の座標を求めよ。
(2) (1)で求めた点 P から x 軸に下した垂線を PH とする。線分 BO , OH , HP とだ円で囲まれる部分の面積を S_1 , 線分 PH , HA とだ円で囲まれる部分の面積を S_2 とするとき、$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ。

（宮崎大）

15. (1) 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(2) $a_1=1$, $k\geqq 2$ のとき、$a_k=a_{k-1}+k(k-1)$で定義される数列$\{a_n\}$の一般項 a_n を、n の式で表せ。また、この数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和を求めよ。

（大分大）

16. 関数$f(x)=x^3-2ax^2+a^2x$（$a>0$）について

(1) $y=f(x)$のグラフを書け。

(2) 曲線$y=f(x)$と直線$y=mx$で囲まれた2つの部分の面積が等しくなるようなmの値を求めよ。ただし、$0<m<a^2$とする。

（富山大）

17. 実数aが区間$0<a<2$を動くとき、定積分$\int_0^1 |x^3-3x+a|\,dx$を最小にするaを求めよ。

（岡山大）

解答

１．(1) 36　(2) 60° or 30°

２．(1) $x+y-z=1$　(2) 略　(3) $G\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$　(4) (3 , 2 , 1)または$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$

３．平面 $4x+y-2z=3$

４．$14x-3y-2z=19$

５．$x^2+35z^2-34z=-8$

６．(1) $p=3$, $q=-5$, $x=3$, $y=-1$　(2) $-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\cdot 3^n-6\cdot(-5)^n & -4\cdot 3^n+4\cdot(-5)^n \\ -3^{n+1}+3\cdot(-5)^n & -2\cdot 3^{n+1}-2\cdot(-5)^n \end{pmatrix}$

７．$A^2=2A-E$　$A^n=nA+(1-n)E$　$(A^{-1})^n=-nA+(n+1)E$

８．略

９．(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $x=k$ (k は任意) ,　$y=\frac{3}{2}x$

10.　順に$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$,　$\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$,　$y=(7-5\sqrt{2})x$

11.　(1)　$a=\sqrt{3}$　(2)　$A^n=2^n\begin{pmatrix} \cos\frac{n}{3}\pi & -\sin\frac{n}{3}\pi \\ \sin\frac{n}{3}\pi & \cos\frac{n}{3}\pi \end{pmatrix}$

12.　(1) $b=3$, $a=2$　(2) $y=2x$　(3) $3x+4y=1$　(4) (2 , 4)と(12 , 24)を結ぶ線分

13.　$-4 \leqq ac+bd \leqq 5$

14.　(1)　$\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$　(2)　$\frac{\pi-2}{\pi+2}$

15.　(1)　略　(2)　$a_n=1+\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$　$\sum_{k=1}^{n}a_k=n+\frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(n+2)$

16.　(1)　略　(2)　$m=\frac{1}{9}a^2$

17.　$a=\frac{11}{8}$