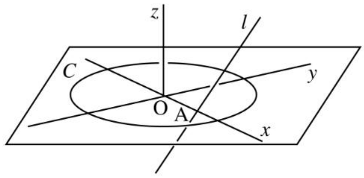
オールラウンドテーマゼミ

動くものを減らせ

１．xy 平面上に点 O を中心とする半径 1 の円 C がある．また、この平面上の O と異なる点 A を通って直線 OA と垂直な空間直線 l があり、平面とのなす角が 45°である。このとき、円 C と直線 l の間の最短距離を、2 点 O , A 間の距離 a で表せ.



２．空間内の点 O に対して、4 点 A , B , C , D を OA = 1 , OB = OC = OD = 4 を満たすようにとるとき、四面体 ABCD の体積の最大値を求めよ。

３．a , b , c を正の実数とする。xyz 空間において、$|x| \leqq a$, $|y| \leqq b$, $z = c$ を満たす点(x , y , z)からなる板 R を考える。点光源 P が平面 $z = c + 1$ 上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c + 1$ の上を一周するとき、光が板 R に遮られて xy 平面上にできる影の通過する部分の図を描き、その面積を求めよ。

４．x_i ($i = 1 , 2 , \cdots , n$) を正数とし、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ を満たすとする。このとき不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq k \log\frac{k}{n}$ を証明せよ。

５．n を 2 以上の自然数とする。$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ および $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ を満足する数列 $x_1 , x_2 , \cdots , x_n$ および $y_1 , y_2 , \cdots , y_n$ が与えられている。$y_1 , y_2 , \cdots , y_n$ を並べかえて得られるどのような数列 $z_1 , z_2 , \cdots , z_n$ に対しても $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}(x_j - z_j)^2$ が成り立つことを証明せよ。

６．n を 2 以上の整数とする。次の 2 つの条件(A) , (B)を満たす整数 a , b , c , d の選び方は何通りあるか。

(A) $1 \leqq a < b < c < d \leqq 2n$

(B) $a + d = b + c$

解答

１．$0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき $\sqrt{\dfrac{1}{2} - a^2}$　　$\dfrac{1}{2} \leqq a$ のとき $|\ a - 1\ |$

２．$9\sqrt{3}$

３．$4ab(\ 3c^2 + 4c + 1\ ) + \pi abc^2$

４．略

５．略

６．$\dfrac{1}{6}n(n-1)(4n-5)$ 通り