

極限の基本から

1. $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + c_{n-1})$, $c_n = \frac{1-p}{2}a_{n-1} + \frac{1+p}{2}c_{n-1}$ ($n \geq 1$), $a_0 = 2, c_0 = 0, (p > 2)$ で定まる数列 $\{a_n\}, \{c_n\}$ がある。

(1) $a_n - c_n, a_n$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n a_n = -2$ となる定数 b および p を求めよ。

(和歌山県立医科大)

2. (1) 無限級数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ が収束するならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であることを証明せよ。

(2) 各項が 0 でない無限級数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ が収束するならば、無限級数

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots$ は発散することを証明せよ。

(3) 各項が 0 でない無限級数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ が発散するならば、無限級数

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots$ は収束するかどうかを論ぜよ。

(大分大・医)

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{2n-1}x^{2n-1} + 4^{2n}x^{2n})$ が収束するような x の範囲を求めよ。また、このときの級数の和を求めよ。

(武蔵野工大)

4. 点 O を中心とする半径 1 の円周上に定点 A がある。半径 OA に直交する弦 PQ をとり、 $\angle POA = \theta$ とする ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)。 $\triangle APQ$ の面積を $S(\theta)$ で表すと、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{S(\frac{\theta}{2})} = [\quad]$ である。

(東京理科大)

解答

1. (1) $a_n - c_n = 2 \left(\frac{p}{2}\right)^n$, $a_n = \frac{2-2p}{2-p} + \frac{2}{2-p} \left(\frac{p}{2}\right)^n$ (2) $p = 3$, $b = \frac{2}{3}$

2. 略

3. $\frac{2x}{1-4x^2} + \frac{16x^2}{1-16x^2}$

4. 8