

整式の加減乗&除

1. 次の式が恒等式になるように、係数 $a, b; a_0, a_1, a_2, a_3$ の値を求めよ。

$$(1) x^2 - 7x + 3 = (x - 2)^2 + a(x - 2) + b$$

(千葉工大)

$$(2) x^3 + x^2 + x + 1 = a_3(x - 2)^3 + a_2(x - 2)^2 + a_1(x - 2) + a_0$$

(東京理科大)

2. $P(x)$ を 3 次以下の整式とする。恒等的に $P(x + 1) + P(x - 1) = 2P(x)$ が成立すれば、任意の α に対しても恒等的に $P(x + \alpha) + P(x - \alpha) = 2P(x)$ が成立することを示せ。

(法政大)

3. x の多項式 $P(x)$ がすべての実数 x に対して

$$P(x + 2) - 2P(x + 1) + P(x) = kx \quad (k \neq 0)$$

をみたすとき、 $P(x)$ の次数を決定せよ。また、 $P(0) = k, P(1) = 3k$ であるとき、 $P(x)$ を求めよ。

(大東文化大)

4. x についての 2 つの整式 $2x^2 - 5x - 2a, x^2 - 5x + 4a$ の最大公約数が一次の整式であるような定数 a の値を求めよ。また、このとき 2 つの整式の最小公倍数を求めよ。

(道都大)

5. 2 つの整式 $x^2 + ax - 2a^2, x^2 + (b - 2)x - 2b$ の最小公倍数が $x^3 - 4x^2 + x + 6$ となるときの、 a, b の値を求めよ。

(工学院大)

6. 2 つの整式 A, B を $A = 2x^3 + 2x^2 - 9x + 4, B = x^2 + x - 5$ とする。いま A を B で割ったときの商を Q , 余りを R すると $Q = [\quad], R = [\quad]$ となり、 $A = BQ + R \cdots \textcircled{1}$ を満たす。さらに B を R で割ったときの商を S , 余りを T とすると $S = [\quad], T = [\quad]$ で等式 $B = RS + T \cdots \textcircled{2}$ を満たす。 $\textcircled{1}$ から $R = A - BQ$ となるので、これを $\textcircled{2}$ に代入して整理すると、 $[\quad]A + [\quad]B = T$ となる恒等式を得る。このことから、 A と B の最大公約数は $[\quad]$ であることがわかる。

(広島修道大)

7. (a) を (b) で割ったときの余りを求めよ。

$$(1) \quad (a) x^{10} + 2x^2 + 3 \quad (b) x^4 - x^2 + 1$$

$$(2) \quad (a) x^{10} + 2x^5 \quad (b) x^3 + x^2 + x + 1$$

$$(3) \quad (a) x^n \quad (n \text{ は自然数}) \quad (b) x^2 + 1$$

(立命館大他)

8. (1) $x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 4$ が $(x-2)^2$ で割り切れるとき、 a, b の値を求めよ。

(久留米工大)

(2) x^n を $(x+1)^2$ で割った余りの式を $a_nx + b_n$ と書く。 $a_{16} - b_{16}$ を求めよ。

(自治医大)

9. $f(x) = x^2 + ax + b$ とする。 $\{f(x)\}^2$ を $x^2 + 1$ でわると 1 余り、その商がすべての実数 x に対して正の値をとるとき、 $(a, b) = [\quad]$ である。

(福岡工大)

10. 多項式 $3x^3 + 2x^2 + 4x - 3$ と $3x^3 - x^2 + x - 6$ を多項式 $f(x)$ で割ると余りが等しくなる。このような $f(x)$ のうち次数が最大であり、 $f(0) = 1$ となるものは $f(x) = [\quad]$ である。また共通の余りは $[\quad]$ である。

(広島工大)

11. 3 次項の係数が 1 である 3 次の整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ると -6 余り、 $x-3$ で割ると 6 余る。

(1) $P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割ったときの余り $R(x)$ を求めよ。

(2) $P(x)$ の各項の係数の和はちょうど 0 になる。 $P(x)$ を因数分解せよ。

(成蹊大)

12. 整式 $f(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割ると $ax+5$ 余り、 $(x+2)(x-3)$ で割ると 11 余るとき、定数 a の値と、 $(x+1)(x+2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

(熊本商大)

13. 整式 $f(x)$ を $x^4 + 2x^3 + 5x + 2$ で割ったときの余りは $x^3 - 4x^2 - 11x + 3$ で、 $x^2 + 3x + 1$ で割ったときの商は $2x^3 + x^2 + 2x - 1$ であった。このとき、 $f(x)$ を求めよ。

(慶應大)

14. 整式 $f(x)$ を $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ で割ると余りは $x^2 + 2x - 3$ であり、 $x^3 - 8x^2 + 21x - 18$ で割ると余りは $3x^2 - 8x + 9$ である。さらに $g(x) = x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$ とおく。

(1) $f(x)$ を $x^2 - 5x + 6$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) $g(x)$ を因数分解せよ。

(3) $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの余りを求めよ。

(上智大)

解答

1. (1) $a = -3, b = -7$ (2) $a_0 = 15, a_1 = 17, a_2 = 7, a_3 = 1$

2. $P(x) = a^3 + bx^2 + cx + d$ とおくと、 $P(x+1) + P(x-1) = 2P(x) + 6ax + 2b$ より
 $a = b = 0$ となり、このとき $P(x+\alpha) + P(x-\alpha) = 2cx + 2d = 2P(x)$

3. $P(x) = \frac{k}{6}x^3 - \frac{k}{2}x^2 + \frac{7}{3}kx + k$

4. $a = 0, 2x^3 - 15x^2 + 25x$ $a = \frac{3}{2}, 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

5. $a = -1, b = -3$

6. 順に、 $2x, x+4, x-3, 7, -S, (QS+1), 1$

7. (1) $x^2 + 4$ (2) $x^2 + 2x$ (3) $n = 2k \rightarrow (-1)^{\frac{n}{2}}, n = 2k - 1 \rightarrow (-1)^{\frac{n-1}{2}} x$

8. (1) $a = -15, b = 16$ (2) -1

9. $a = 0, b = 2$

10. 順に $x^2 + x + 1, 2x - 2$

11. (1) $3x - 3$ (2) $(x-1)(x-2)x$

12. $2x^2 - 2x - 1$

13. $2x^5 + 7x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 8x + 9$

14. (1) $7x - 9$ (2) $(x-2)^2(x-3)^2$ (3) $2x^3 - 13x^2 + 34x - 27$