日々の演習

ベクトル, 座標空間における直線

◆スタンダード演習

１．平面上に三角形 OAB がある。OA を $3:1$ に外分する点を P , OB を $2:1$ に内分する点を Q , PQ と AB との交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

（東京学芸大）

２．三角形 OAB において、辺 OA を $2:1$ に内分する点を C , 辺 OB の中点を D とし、線分 AD と線分 BC の交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表すと[　　　]となる。また、AB と直線 OE の交点を F とするとき、$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{BF}}$ の値は[　　　]である。

（福岡大）

３．正六角形 ABCDEF において、辺 PC の中点を G , 辺 CD の中点を H , 線分 AH と FG の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

(2) AP : PH および EP : PG を求めよ。

（山形大）

４．三角形 ABC の重心 G を通る直線が辺 AB , AC と交わるとき、それらの交点をそれぞれ D , E とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$, $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}=r$, $\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AC}}=s$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{GD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{GE}}$ を r , s , $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(3) $\dfrac{\mathrm{GD}}{\mathrm{GE}}=t$ とおくとき、r , s を t で表せ。

(4) $\dfrac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}}+\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AE}}=1$ を示せ。

（香川大）

５．平面上に平行四辺形 ABCD と点 P があり、$m\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ (ただし、$m>0$)が成り立っている。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{v}$ として $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{u}$, $\vec{v}$, m を用いて表せ。

(2) 直線 AP が辺 BC またはその延長と交わる点を Q とする。BQ : QC を求めよ。

(3) AP：PQ を求めよ。

(4) 三角形 ACD の重心を G とする。線分 PG が辺 AD と平行になるとき、m の値を求めよ。

（岡山理科大）

６．平面上の異なる 4 点 A , B , C , P は $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。このとき三角形 ABC と三角形 PBC の面積の比を求めよ。

（東京電機大）

７．$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ かつ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=-2$ であれば $|\vec{a}|=$[　　]，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は[　　]π である。ただし、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a},\vec{b}$ の内積を表す。

（明治学院大）

８．$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ の三角形 AOB で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}$ ，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と大きさ $|\vec{c}|$ を求めよ。

(2) ベクトル $\vec{p}=\vec{c}-x\vec{b}$ の大きさの最小値とそのときの実数 x の値を求めよ。

(3) ベクトル $\vec{p}=\vec{c}-y\vec{b}$ が三角形 AOB の内角∠A の二等分線となるとき、実数 y の値を求めよ。

（聖徳学園岐阜教育大）

９．三角形 ABC において、$\mathrm{CA}=\sqrt{5}$, $\mathrm{CB}=2\sqrt{3}$ であり、また、$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=4$ である。A より CB に下した垂線の足を H とする。

(1) 三角形 ABC の面積は $\sqrt{[\quad]}$ である。

(2) CH：HB = 1：[　　]である。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ で表すと[　　]である。

(4) AB1：2 をに内分する点を P , CP と AH の交点を Q とし、$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ で表すと[　　]である。

（千葉工大）

10. 平面上で辺の長さ 1 の正三角形を考える。点 P に対しベクトル v (P)を次で与える。

$$v(\mathrm{P})=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}$$

(1) v (P)は P に無関係な一定のベクトルであることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=|v(\mathrm{P})|$ となるような点 P はどんな図形を描くか。

（高知大）

11. 四面体 OABC の辺 OA , BC , OC , AB 上にそれぞれ点 P , Q , R , S を OP：PA = 1：1 , BQ：QC = 2：1 , OR：RC = 1：2 , AS：SB = 1：4 になるようにとる。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}$ として、直線 PQ の方程式を媒介変数 t と $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 直線 PQ と直線 RS が交わることを示せ。

（広島大）

12. 一辺の長さが 1 である正四面体 OABC がある。辺 AB を 1 :3 に内分する点を D とし、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ。また、大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ はいくらか。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を求めよ。

(4) $\angle\mathrm{ODC}=\theta$ とするとき、$\cos\theta$ の値を求めよ。

（東北学院大）

13. 四面体 OABC において OA = BC , OB = CA , OC = AB とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2)$ が成り立つことを示せ。

(2) 辺 OA の中点を D 、辺 BC の中点を E とすると、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は直交することを示せ。

(3) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ をみたす点 P は、4 頂点 O , A , B , C から等距離にあることを示せ。

（筑波大）

14. O を原点とする空間に $\mathrm{OA}=2\sqrt{2}$, $\mathrm{OC}=4$ である長方形 OABC がある。辺 OC の中点を M とし、MB を軸として△PMC を 90° 回転させたとき頂点 C が点 P に移ったとする。また、頂点 P から長方形 OABC へ垂線 PH を下す。

(1) BH =[　　]である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}=-$[　　]$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-$[　　]$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である。

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ の値は[　　]である。

(4) △BPA の面積は[　　]である。

（金沢工大）

15. 座標空間において、2 つのベクトル $\vec{a}=(2,-2,1)$, $\vec{b}=(1,-3,1)$ がある。

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直で原点を通る直線の方程式は[　　　]$=z$ である。

(2) t を実数とするとき、ベクトル $\vec{x}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ の長さが最小になるのは $\vec{x}=$[　　　]のとき、その最小値は[　　　]である。

（芝浦工大）

16. 直線 $l:\dfrac{x+6}{2}=y-2=\dfrac{z-6}{-1}$ と点 A(0 , − 1 , − 3)が与えられている。直線 l 上の 2 点 B , C に対し、三角形 ABC が正三角形になるような B , C の座標を求めよ。

（岐阜大）

17．2 直線 $x=y=z$ … ①，$x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-6}{-1}$ … ②がある。直線①上の点 A(s , s , s) と直線②上の点 B($t+1$, $2t-1$, $-2t-1$)について、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が①,②のどちらにも垂直であるように s , t の値を定めよ。また、そのときの点 A , B の座標と線分 AB の長さを求めよ。

（佐賀大）

◆標準～発展問題精選集

１．平行四辺形 ABCD において、AB , BC の中点をそれぞれ P , Q とし、CD の 3 等分点を C の方から順に R , S とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{s}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{t}$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\vec{s}$ と $\vec{t}$ で表せ。

(2) AR と PS の交点を X , PS と QD の交点を Y とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ を $\vec{s}$ と $\vec{t}$ で表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ の大きさを $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=a$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=b$, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=c$ を用いて表せ。

（お茶の水女子大）

２．三角形 OAB において、辺 OA を 3 : 2 に内分する点を C，辺 AB を $m:n$ に内分する点を D とする。線分 OD と線分 BC の交点を P とし、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$,$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を m , n，$\vec{a}$,$\vec{b}$ で表せ。

(2) 辺 OA の中点を Q とする。線分 QP と辺 OB が平行となるときの比 $m:n$ を求めよ。

（新潟大）

３．対辺がともに平行でない平面上の四角形 ABCD において、対辺 AB と CD を延長したときにできる交点を E，対辺 BC と AD を延長したときにできる交点を F とする。
$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\beta\vec{c}$ とする。

(1) AC の中点を L とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{BL}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) BD , EF の中点をそれぞれ M , N とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{BM}}$,$\overrightarrow{\mathrm{BN}}$ を $\vec{a}$,$\vec{c}$, α , β を用いて表せ。

(3) L , M , N が同一直線上にあることを示せ。

（広島大）

４．△ABC の内部に点 P があって $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+m\overrightarrow{\mathrm{PB}}+n\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ (m , n は正の数)が成り立っている。また、直線 AP が線分 BC と交わる点を D としたとき、D は線分 BC を $t:(1-t)$に内分している。

(1) t を m , n で表せ。

(2) AP : PD を m , n で表せ。

(3) $\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{BCP}=\theta$, $m=3$, $n=2$, BC = 3AC のとき、$\tan\theta$ を求めよ。

（神奈川工科大）

５．平面上に異なる定点 A , B と定円 O の上を動く点 P がある。$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ によって点 Q を定めるとき、次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 2 : 3 に内分する点を C とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ で表せ。

(2) 点 Q はどんな図形をえがくか。

(3) 円 O と直線 AB が共有点を持たないならば､点 Q のえがく図形と直線 AB も共有点を持たないことを証明せよ。

（鳴門教育大）

６．△OAB の辺 OA , OB の中点をそれぞれ M , N とし、線分 BM と AN の交点を G とする。辺 OA , OB 上にそれぞれ点 Q , R をとる。ただし、Q , R は O , A , B とは異なる点とする。さらに、△AGM の内部（周を除く）の点を P とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{a}$ とおく。また、△OAB の面積を S，△OQR の面積を T とおく。

(1) 点 P が△AGM の内部を動くとき、実数 x , y の取り得る範囲を xy 平面上に図示せよ。

(2) $T=\dfrac{1}{2}S$ のとき、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を t，$\vec{b}$ で表せ。

(3) 線分 QR が点 P を通り、条件 $T=\dfrac{1}{2}S$ を満たすとき、t を x , y で表せ。

（静岡県立大）

７．1 辺の長さが 1 の正三角形 OAB において、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。辺 OA , OB の延長上に $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=4\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=3\vec{b}$ となる点 C , D をとり、∠O の 2 等分線が辺 CD と交わる点を E とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$,$\vec{b}$ で表せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}|=3$ を満足する点 P はどのような図形上にあるか。

(3) 線分 OE の、(2)で求めた図形に内部にある部分の面積を求めよ。

（広島県立大）

８． 等脚台形 ABCD（AD // BC, AB = DC , AD≦BC）に対して、$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{s}$, $|\vec{s}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{t}$, $|\vec{t}|=k$，$\vec{s}\cdot\vec{t}=m$ とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を m , $\vec{s}$, $\vec{t}$ で表せ。

(2) ∠ABC の 2 等分線と直線 CD の交点を E とするとき､ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を k , m , $\vec{s}$, $\vec{t}$ で表せ。

(3) $k=\dfrac{14}{13}$ で、E が辺 CD の中点であるとき、m の値を求めよ。

（新潟大）

９．平面上に互いに平行ではない長さ 1 のベクトル$\vec{a},\vec{b}$があり、そのなす角を θ とする。ベクトル$t\vec{a}+\vec{b}$, $t\vec{a}-\vec{b}$のなす角が θ に等しいとするとき、次の問いに答えよ。

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき t の値を求めよ。

(2) $\cos\theta$ を t を用いて表せ。

(3) t のとり得る値の範囲を求めよ。

（電通大）

10. $\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{AC}=2$, $\angle\mathrm{A}=\dfrac{2}{3}\pi$ である。△ABC を点 A のまわりにある角度だけ回転させた三角形を△AB'C'とし、点 B'（$\neq$ B）は線分 BC 上にあるとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 t の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC'}}=r\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 r , s の値を求めよ。

（大同工大）

11. 平面上に 4 つの定点 A , B , C , D と動点 P があり、$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{d}$ とおく。点 P が$(\vec{a}\cdot\vec{b})+(\vec{b}\cdot\vec{c})+(\vec{c}\cdot\vec{d})+(\vec{d}\cdot\vec{a})=0$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を求めよ。

（滋賀医科大）

12. O , A , B , C は同一平面上にない 4 点, s , t は $0<s<1$, $0<t<1$ をみたす実数であるとする。線分 OA , BC の中点をそれぞれ M , N , 線分 AB を $s:1-s$ に内分する点を P, 線分 CO を $t:1-t$ に内分する点を Q とする。

(1) R は直線 MN 上の点であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表すとき、$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$, $\beta=\gamma$ であることを示せ。

(2) 直線 MN と PQ が交わるための条件を求めよ。

（京都教育大）

13. 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC がある。また、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1) 三角形 ABC を含む平面上の点 P の位置ベクトルは、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$, $l+m+n=1$ の形に表されることを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, $x+2y+3z=1$ の形で表される点 Q はいかなる平面上にあるか。

(3) 点 O と(2)で与えられた平面との距離を求めよ。

（広島県立大）

14. (1) $\vec{d}$ は空間内のベクトルで、その長さは 1 とする。位置ベクトルが$\vec{u}$である点から、ベクトル方程式$\vec{m}=t\vec{d}$ で表される直線への距離の平方は、$|\vec{u}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{d})^2$ であることを示せ。

(2) 空間内にベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が与えられていて $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ はいずれも長さが 1 で、$\vec{c}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ のいずれとも直交し、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は θ ($0<\theta<\pi$) であるとする。

(i) $|x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}|^2$ を x, y, z, θ で表せ。

(ii) ベクトル方程式 $\vec{m}=t\vec{a}$, $\vec{m}=t\vec{b}$, $\vec{m}=t\vec{c}$ で表される 3 本の直線のすべてに接する半径 l の球の中心の位置ベクトルを $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ として、$x>0, y>0, z>0$ を満たす x, y, z を求めよ。

（神戸商科大）

15. 空間の 2 直線 $\dfrac{x-a}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+7}{3}$, $x-3=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-a}{-1}$ が交わるように a の値を求め、その交点を通りこれらの 2 直線に垂直な直線の方程式を求めよ。

（東京電機大）

16. 直線 l : $\dfrac{x}{2}=y=\dfrac{z}{-2}$ と 2 点 A(6 , 6 , 0) , B(4 , − 1 , - 1)がある。

(1) A , B から l に引いた垂線の足を H , K とするとき、H の座標は[　　　] , K の座標は[　　　]である。

(2) $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BK}}=$[　　　]

(3) 点 P が l 上を動くとき、AP + BP が最小となる点 P の位置の座標は[　　　]である。

（昭和薬科大）

解答

◆スタンダード演習

１． $\overrightarrow{OR}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

２．順に $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$ ， $\frac{1}{2}$

３．(1) $\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$ (2) 順に $6:7$, $8:5$

４．(1) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ (2) $\overrightarrow{GD}=-\frac{1}{3}\vec{c}+\left(r-\frac{1}{3}\right)\vec{b}$ $\overrightarrow{GE}=-\frac{1}{3}\vec{b}+\left(s-\frac{1}{3}\right)\vec{c}$

(3) $r=\frac{t+1}{3}$, $s=\frac{t+1}{3t}$ (4) $\frac{DB}{AD}+\frac{EC}{AE}=\frac{1-r}{r}+\frac{1-s}{s}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}-2=\frac{3}{t+1}+\frac{3t}{t+1}-2=1$

５．(1) $\frac{\vec{u}+\vec{v}}{m+2}$ (2) $BQ:QC=1:1$ (3) $AP:PQ=2:m$ (4) $m=4$

６． $9:2$

７．順に 2 , $\frac{2}{3}\pi$

８．(1) $\frac{3}{2}$ (2) $x=\frac{5}{6}$ のとき、最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{7-\sqrt{7}}{6}$

９．(1) $\sqrt{11}$ (2) $CH:HB=1:2$ (3) $\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ (4) $\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$

10. (1) $v(P)=(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP})+3\overrightarrow{BP}+2(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})=\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}$ より

(2) △ABC の重心を中心とする半径 $\frac{\sqrt{7}}{3}$ の円を描く

11. (1) $\vec{x}=\frac{1-t}{2}\vec{a}+\frac{t}{3}\vec{b}+\frac{2t}{3}\vec{c}$ (2) (1)と同様に RS のベクトル方程式は

$\vec{x}=\frac{4s}{5}\vec{a}+\frac{s}{5}\vec{b}+\frac{1-s}{3}\vec{c}$ より $t=\frac{3}{11}$, $s=\frac{5}{11}$ と定めればともに $\frac{4\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}}{11}$ となる。

12. (1) $\overrightarrow{OD}=\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}$, $|\overrightarrow{OD}|=\frac{\sqrt{13}}{4}$ (2) $\frac{3\vec{a}+\vec{b}}{4}-\vec{c}$ (3) $\frac{5}{16}$ (4) $\frac{5}{13}$

13. (1) $(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2)-2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}-\vec{a}|^2-|\vec{c}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2=0$ より

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\dfrac{\vec{a}}{2}$ より $4\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$=2|\vec{c}|^2-2|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}=2|\vec{c}|^2-2|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2)$

$=|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2-|\vec{b}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=0$

(3) $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})=2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{c}-2|\vec{a}|^2$

$=(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2)+2\vec{a}\cdot\vec{c}-2|\vec{a}|^2=0$ より $\mathrm{OA}\perp\mathrm{DE}$ 、また、P は DE の中点

で $\mathrm{OA}=\mathrm{BC}$ から△POD≡△PAD≡△PBE≡△PCE より。

14. (1) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (2) $-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (3) $\dfrac{16}{3}$ (4) $\dfrac{4}{3}\sqrt{14}$

15. (1) $-4x=4y=z$ (2) $\vec{x}=(2,-2,1)$ で、最小値は 3

16. $(4,7,1),(-4,3,5)$

17. $s=-\dfrac{5}{13},t=-\dfrac{2}{13}$, $\mathrm{A}\left(-\dfrac{5}{13},-\dfrac{5}{13},-\dfrac{5}{13}\right),\mathrm{B}\left(\dfrac{11}{13},-\dfrac{17}{13},-\dfrac{9}{13}\right)$, $\mathrm{AB}=\dfrac{4\sqrt{26}}{13}$

◆ 標準～発展問題精選集

１. (1) $\dfrac{1}{6}\vec{s}+\vec{t}$ (2) $-\dfrac{2}{55}\vec{s}+\dfrac{12}{55}\vec{t}$ (3) $\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$

２. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{m+n}(n\vec{a}+m\vec{b})$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{3m+5n}(n\vec{a}+m\vec{b})$ (2) $m:n=1:3$

３. (1) $\overrightarrow{\mathrm{BL}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\dfrac{\alpha(\beta-1)}{2(\alpha\beta-1)}\vec{a}+\dfrac{\beta(\alpha-1)}{2(\alpha\beta-1)}\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{BN}}=\dfrac{\alpha}{2}\vec{a}+\dfrac{\beta}{2}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{LN}}=\overrightarrow{\mathrm{BN}}-\overrightarrow{\mathrm{BL}}=\dfrac{(\alpha-1)\vec{a}+(\beta-1)\vec{c}}{2}$, $\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\overrightarrow{\mathrm{BM}}-\overrightarrow{\mathrm{BL}}=\dfrac{(1-\alpha)\vec{a}+(1-\beta)\vec{c}}{2(\alpha\beta-1)}$ より

４. (1) $t=\dfrac{n}{m+n}$ (2) AP：PD = $(m+n):1$ (3) $\tan\theta=\dfrac{1}{9}$

５. (1) $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\dfrac{1}{5}(3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{AO'}}=-5\overrightarrow{\mathrm{CO}}$ をみたす点を O’とおくと、Q は O’を中心として円 O の半径の 5 倍の円を描く (3) O , O’から直線 AB に下した垂線を OH , O’H’とおくと、OH : O’H’ = 1 : 5 で、一方、円 O と円 O’の半径の比も 1 : 5 だから

６．(1) 略　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2t}\vec{b}$　(3) $t=\dfrac{1-\sqrt{1-8xy}}{4y}$

７．(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{12}{7}(\vec{a}+\vec{b})$　(2) △OCD の重心を G とおくと、P は G を中心とする半径 1 の円周上にある。　(3) $\dfrac{23}{42}\sqrt{3}+\dfrac{1}{6}\sqrt{35}$

８．(1) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=-\vec{q}+2m\vec{s}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\dfrac{1}{k+2m}(k\vec{s}+\vec{t})$　(3) $m=\dfrac{6}{13}$

９．(1) $t=\pm1$　(2) $\cos\theta=\dfrac{t^2-1}{2|t|}$　(3) $-1-\sqrt{2}<t<1-\sqrt{2}\,,\,-1+\sqrt{2}<t<1+\sqrt{2}$

10. (1) $t=\dfrac{4}{7}$　(2) $(r\,,s)=\left(-\dfrac{16}{7},-\dfrac{5}{7}\right)$

11. AC の中点を M , BD の中点を N とすると、P の軌跡は MN を直径とする円となる。

12. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OM}}+u\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1-u}{2}\vec{a}+\dfrac{u}{2}\vec{b}+\dfrac{u}{2}\vec{c}$ より　(2) $s+t=1$

13. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　(2) 略

14. (1) 略　(i) $x^2+y^2+z^2+2xy\cos\theta$　(ii) $x=y=\dfrac{1}{2\cos(\theta/2)}$　$z=l\cos\dfrac{\theta}{2}$

15. $(x\,,y\,,z)=(2\,,-1\,,-1)+u(-1\,,1\,,1)$ (u はパラメーター)

16. (1) H(4 , 2 , − 4) , K(2 , 1 , − 2)　(2)　2　(3) $\mathrm{P}_0\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{4}{3},-\dfrac{8}{3}\right)$