**数Ⅰ演習**

# 1～4次方程式

**1.** 次の連立方程式を解け。ただし、$k$ は与えられた定数で整数である。

$$\begin{cases} x+2y+3z=kx \\ 2x+3y+z=ky \\ 3x+y+2z=kz \end{cases}$$

（東北学院大）

**2.** 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(ac\neq 0)$ の解を $\alpha,\beta$ とするとき、

(1) $ax^2-bx+c=0$ の解を $\alpha,\beta$ で表せ。

(2) $4cx^2+2bx+a=0$ の解を $\alpha,\beta$ で表せ。

（立正大）

**3.** 2 次方程式 $x^2-3x+3=0$ の解を $\alpha,\beta$ とするとき、$f(\alpha)=k\beta,f(\beta)=k\alpha,f(1)=k$ を満たす 2 次式 $f(x)$ を $k$ を用いて表せ。

（関東学院大）

**4.** 実数係数の 2 次方程式 $x^2+2(a-1)x-2(a-1)=0$ が虚数解をもち、また、この方程式の 3 乗がいずれも実数であるとき、$a$ の値を求めなさい。

（龍谷大）

**5.** $x$ についての 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ の 2 つの解が $\alpha,\beta$ であるとき、2 次方程式 $x^2-bx+a=0$ の 2 つの解は $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$ であるという。ただし、$a\neq b$ とする。

(1) $a^3,b^3$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $(a+1)^{1992}+(b+1)^{1992}+(a+b)^{1992}$ の値を求めよ。

（北海学園大）

**6.** 方程式 $x^2-2px+p+2=0$ が次の条件に適する解をもつように、実数 $p$ の値の範囲をそれぞれ定めよ。

(1) 2 つの解が共に 1 より大きい。

(2) 1 つの解は 1 より大きく、他の解は 1 より小さい。

（松山大）

**7.** 2 次方程式 $bx^2+ax-1=0$ $(a,b$ は実数で、$b\neq 0)$ は異なる実数解を持ち、それらの絶対値はともに 1 より大きい。点$(a,b)$ の存在する領域を図示せよ。

（甲南大）

**8.** $m, n$ を整数とする。2 次方程式 $2x^2 - 2(m+n)x + n(2m+n) = 0$ の 2 つの解 $\alpha, \beta$ が $1 \leqq \alpha < 2, 2 < \beta < 3$ となるように、$m, n$ の値を定めよ。

（立命館大）

**9.** 2 次方程式 $x^2 - (a+2)bx + (a+1)b = 0$ $(a > 0, b > 0)$ が異なる 2 つの実数解をもつとき、次の問いに答えよ。

(1) 少なくとも 1 つの解は 1 より大きいことを示せ。

(2) 2 つの解がともに 1 より大きいためには、さらにどのような条件をつけ加えることが必要十分か。

（成蹊大）

**10.** $x$ についての 2 次方程式 $(a^2+2a+2)x^2 - 2(a+m)^2x + a^2 + 3ma + n = 0$ は、任意の実数 $a$ に対し、異なる 2 つの解 $\alpha, \beta$ をもつ。これらのうち解 $\alpha$ はつねに 1 であるとき、

$m$ = [　　], $n$ = [　　]であり、もう 1 つの解は $\beta = \frac{a^2+[\quad]a+[\quad]}{a^2+[\quad]a+[\quad]}$ で与えられる。また、$\beta$ のとりうる値の範囲は[　　]$\leqq \beta \leqq$[　　]となる。

（阪南大）

**11.** 3 次方程式 $x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0$ の 3 つの解を $\alpha, \beta, \gamma$ とするとき、

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$ [　　], $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 =$ [　　],

（立正大）

**12.** 3 次方程式 $x^3 - 12x^2 + 47x + a = 0$ が相異なる 3 つの整数解をもつとき、$a$ の値および方程式の解を求めよ。

（青山学院大）

**13.** (1) $x$ の 3 次方程式 $x^3 + ax + b = 0$ が 2 重解を持つ（3 重解は持たない）ための実数 $a, b$ に関する必要十分条件は $a \neq 0$ かつ $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = 0$ であることを示しなさい。

(2) $x$ の 4 次方程式 $x^4 + cx^2 + dx + e = 0$ が相異なる 2 つの 2 重解を持つための実数 $c, d, e$ に関する必要十分条件を求めなさい。

（専修大）

**14.** 次の 4 次方程式を解け。

(1) $(x^2+4x+3)(x^2+12x+35) + 15 = 0$

(2) $f(f(x)) = x$（ただし、$f(x) = -2x^2 + kx$）

(3) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

（実践女子大 , 西南学院大 , 福岡大）

**15.** 有理数 $a, b, c, d$ を係数及び定数項とする 4 次の方程式
$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ がある。この方程式の 1 つの解が $\sqrt{3} + i$ であるとき、$f(x) = 0$ のすべての解を求めよ。ただし、$i = \sqrt{-1}$

（仏教大）

解答

1．$k = 6 \to x = y = z$ (=任意)　$k \neq 6 \to x = y = z = 0$

2．(1) $-\alpha, -\beta$　(2) $\frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2\beta}$

3．$f(x) = -kx^2 + 2kx$

4．$a = \frac{1}{2}$

5．(1) $a^3 = 1, b^3 = 1$　(2) 3

6．(1) $2 \leqq p < 3$　(2) $p > 3$

7．略

8．$(m, n) = (3, 1), (-3, 7)$

9．(1) 背理法による　(2) $b < 1$

10. $m = 2, n = 6, \beta = \frac{a^2+6a+6}{a^2+2a+2}$ $, -1 \leqq \beta \leqq 3$

11. 順に $12, -41$

12. $a = -60$　解 $= 5, 4, 3$

13. (1) 略　(2) $e = \frac{c^2}{4} \neq 0, d = 0$

14. (1) $-2, -6, -4 \pm \sqrt{6}$　(2) $0, \frac{k-1}{2}, \frac{k+1 \pm \sqrt{k^2-2k-3}}{4}$　(3) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4} i$

15. $x = \pm(\pm\sqrt{3} + i)$　（複合任意）