

外積ベクトルの定義と応用

1. 空間ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して、次のようなベクトル $\vec{c}$ を $\vec{a} \times \vec{b}$ で表し、 $\vec{a}, \vec{b}$

の外積という。

(性質1) $\vec{c}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ と直交する。

(性質2) $\vec{c}$ の大きさは $\vec{a}, \vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 S に等しい。特に、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ならば $\vec{c} = \vec{0}$ である。

(性質3) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ のとき、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は右手系をなす。すなわち、 $\vec{a}$ が右手の親指、 $\vec{b}$ が人差し指、 $\vec{c}$ が中指に対応する。さて、このとき、

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

であることを証明せよ。

2. a, b, c, d は $ad - bc \neq 0$ を満たす整数とする。 $O(0, 0), A(a, c), B(a+b, c+d), C(b, d)$ の作る四角形 $OABC$ を F とする。

(1) F の面積を求めよ。

(2) F の周上を O から出発して、内部を右に見ながら一周するとき、 O, A, B, C の順に通過するための必要十分条件を a, b, c, d を用いて表せ。

(3) x, y が共に整数のとき、点 (x, y) を格子点とよぶ。 F の面積が 1 のとき、その内部（周は含まない）には格子点がないことを示せ。

(慶応大)

3. 空間内に直線 $l: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z-2$ と点 $A(1, 2, 1)$ がある。 l と A の距離を求めよ。

4. xyz 空間内で、 $A(2, 1, 0)$ を通る直線 $l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ と、点 $B(5, 1, 3)$ がある。点 B を直線 l を軸として回転して得られる動点を $P(x, y, z)$ とするとき、 y の変域を求めよ。

解答

1. 略

2. (1) $|ad - bc|$ (2) 略 (3) 略

3. $\sqrt{\frac{13}{7}}$

4. $3 - \sqrt{5} \leq y \leq 3 + \sqrt{5}$