日々の演習

空間座標をマスターしよう

■スタンダード演習

1. xyz 空間内に 2 点 A(4 , 0 , 1) , B(0 , 4 , 1)と 2 直線 $l: x-4=-y=z$, $m: x=\frac{y}{2}=z$ がある。直線 l 上の点を P とする。次の問いに答えよ。

(1) 3 点 A , B , P が同一直線上にないとき、3 点 A , B , P を通る平面と直線 m の交点の座標を求めよ。

(2) 三角形 ABP の面積が $6\sqrt{2}$ となるとき、P の座標を求めよ。

（横浜国大・工）

2. 2 平面 m, n の交線の方程式は $x=\frac{5-y}{2}=-(1+2z)$ であり、平面 m は点(2 , 4 , 0)を通る。

(1) 平面 m の方程式を求めよ。

(2) さらに、2 平面 m, n が直交するとき、平面 n の方程式を求めよ.

（成城大・経）

3. 空間に点 A$(-1,-1,3)$ とベクトル $\vec{p}=(1, k-1, 2k)$ （ただし、k は実数とする）が与えられている。次の問に答えよ。

(1) 点 A を通り方向ベクトルとして $\vec{p}$ をもつ直線が点 B$(2,-3,5)$ を通るように k の値を求めよ。

(2) 点 A を通り方向ベクトルとして $\overrightarrow{p}$ をもつ直線は k がどのような値をとっても一定の平面に含まれることを示せ。また、この平面の方程式を求めよ。

（秋田大・教）

4. 座標空間において、原点 O を通りベクトル$(-3,2,1)$ に垂直な平面を α とし、点$(1,1,1)$を通り、ベクトル$(-1,2,3)$ に垂直な平面を β とする。2 平面 α, β の交線を含み、点$(3,1,2)$を通る平面の方程式を求めよ。

（鹿児島大・理 , 工）

5. 空間に 2 点 A$(1,-2,7)$, B$(5,-2,11)$ と平面 $\alpha: x+2y-z+4=0$ がある。

(1) α に関して,点 A と対称な点の座標は（　　）である。

(2) α 上に動点 P をとるとき、AP + PB が最小となる点 P の座標は（　　）である。

（東北工大）

6. 2 つの平面 $\alpha : 2x + y + z - 3 = 0$, $\beta : x + 2y - z - 4 = 0$ がある。次の問に答えよ。

(1) 2 平面 α , β のなす角を求めよ。

(2) 2 平面 α , β の交線 l の方程式を求めよ。

(3) 平面 α 上の点 A(1 , 1 , 0)を通り、平面 α に垂直な直線と平面 β との交点 B の座標を求めよ。

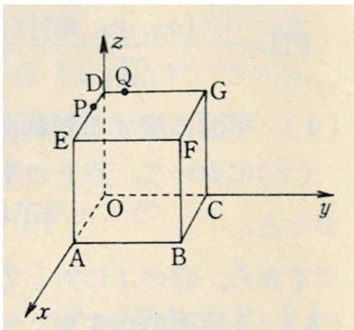
(4) 点 P が交線 l 上を動くとき、△APB の面積の最小値を求めよ。

（早大・社会）

7. 空間内の点 P(2 , 2 , 1)から、直線 $l : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$ に下ろした垂線の足 H の座標は（　　　）である。P を通り l に垂直な平面 S 上に、1 点 Q をとり、2 つのベクトル $\overrightarrow{HP}$ と $\overrightarrow{HQ}$ とが長さが等しくかつ直交するようにするとき、Q の x 座標は（　　　）である。P を l のまわりに角 $\frac{\pi}{3}$ だけ回転した位置にある点 R の y 座標は（　　　）である。

（中央大・理工）

8. 空間内に図のような、辺の長さ 1 の立方体 OABC-DEFG がある。辺 DE 上に点 P(a , 0 , 1) , 辺 DG 上に点 Q(0 , a , 1)を $0 < a < 1$ であるようにとる。



(1) 3 点 P , Q , B を通る平面 π の方程式を求めよ。

(2) π と x 軸 , y 軸 , z 軸との交点を L , M , N とするとき、三角形 LMN の面積を求めよ。

(3) 立方体を π で切ったとき、切り口としてあらわれる五角形の面積を求めよ。

（福井大・教）

9. 空間内の 2 点 A$(3 , 2 , -2)$, B$(-1 , -4 , 6)$ を直径の両端とする球面を S とする。

(1) 球面 S の方程式を求めよ。

(2) 球面 S と平面 $x + 2y - 2z = 4$ が交わってできる円の半径を求めよ。

(3) 直線 $\frac{x-1}{-2} = y + 2 = \frac{z-4}{2}$ が球面 S によって切りとられてできる線分の長さを求めよ。

(静岡大・農，教）

10. xz 平面に接する球があり、この球と xy 平面との交線は、円 : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$, $z = 0$ である。

(1) この球の方程式を求めよ。また、中心の座標と半径を求めよ。

(2) この球と yz 平面との交線の方程式をかけ。

（明星大・理工）

11. 次の問いに答えよ。

(1) 空間内の 4 点 0(0 , 0 , 0) , A(2 , 0 , 0) , B(0 , 2 0) , C(0 , 0 , 4)を頂点とする四面体 OABC に内接する球 R の方程式を求めよ。

(2) 線分 OC の中点を D とするとき、3 点 A, B, D を通る平面と球 R が交わってできる円の半径を求めよ。

（島根大・理）

12. 原点に中心をもつ半径 2 の球面と、座標（1 , 2 , 2）に中心をもつ半径 3 の球面が交わってできる円を含む平面の式と、その円の半径を求めよ。

（甲子園大）

13. 点 A$(-4\,,0\,,2)$と平面$\pi : 2x + y - 2z + 3 = 0$ について、次の問いに答えよ。

(1) 点 A から平面πに下した垂線の足を H とするとき、H の座標を求めよ。

(2) 平面π上の点$(2\,,-3\,,2)$ を中心とし、π上に描かれた半径 4 の円周上を動く点を P とする。線分 AP の長さが最小になるときの点 P の座標を求めよ。

(中部大・経営情報）

14. O を原点とする座標空間において、点 A$(3\,,\sqrt{3}\,,6)$ を通り、球$S : x^2 + y^2 + z^2 = 12$ に接する直線 l がある。l と S の接点を P とするとき、次の問に答えよ。

(1) OA：OP＝[　　]：1 であり AP の長さは[　　]である。

(2) l が S に接しながら動くとき、P は平面 $x + ay + bz + c = 0$ (a , b , c は定数）と S との交わりの円 C 上を動く。このとき、b＝[　　]である。

(3) (2)の円 C の半径は[　　]であり、C の中心の x 座標は $\frac{3}{[\ ]}$ である。

（千葉工大）

15. 空間において、yz 平面上の定点$(0\,,-1\,,1)$ を A とし、r を正の実数とするとき、$x^2 + z^2 = r^2\,, y = 0$ で定まる xz 平面上の円を C とする。また実数 s , t に対して、xy 平面上の点（s , t , 0）を P とし、2 点 A , P を通る直線を l とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) l と xz 平面が交わるとき、その交点の座標を求めよ。

(2) s と t が条件「l と C が交わる」をみたしながら変わるとき、(s , t) を座標とする点の軌跡を C' とする。C' が双曲線になるときの r の範囲 , C' が放物線となるときの r の値 , C' がだ円となるときの r の範囲をそれぞれ求めよ。

（福岡教育大）

■標準～発展問題

1. 空間に 2 直線 $l : x-1=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{3}$, $m : \frac{x-2}{3}=y-1=\frac{z-2}{2}$ がある。次の問いに答えよ。

(1) l と m はどのような位置関係にあるか。

(2) m を含み、l に平行な平面 α の方程式を求めよ。

(3) l と m の最短距離を求めよ。

(4) 平面 α に関して、l と対称な位置にある直線の方程式を求めよ.

（鳴門教大）

2. 点 P$(1 , 2 , -1)$ と、2 直線 $g_1 : x-1=y=2(z+1)$, $g_2 : x+1=2(y-1)=z$ がある。次の問に答えよ。

(1) 点 P と、直線 g_1 で定まる平面 α の方程式を求めよ。

(2) 平面 α と、直線 g_2 の交点の座標を求めよ。

(3) 点 P を通り g_1 と g_2 の双方に交わる直線 g_3 の方程式を求めよ。

(4) 定点 A$(2 , 3 , 0)$, B$(0 , 1 , 2)$ と直線 g_3 上の動点 Q に対して、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ と $\overrightarrow{BQ}$ の内積 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BQ}$ の最小値を求めよ。

（高知医大）

3. xyz 空間内の 3 点 A $(1 , 1 , 1)$, B$(-1 , 2 , 2)$, C$(2 , -1 , 5)$ を通る平面 α の方程式は、[　　　]である。‘方程式 $x+y+z=0$ で表される平面を β とするとき、β に関して A と対称な点の座標は[　　　]で、β に関して α と対称な平面の方程式は、[　　　]である。

（埼玉工大）

4. 2 点 A$(2 , 2 , -4)$, B$(1 , -2 , 1)$ がある。O を原点とするとき、

(1) ∠AOB を求めよ。

(2) 直線 AB の方程式を求めよ。また、O と直線 AB との距離を求めよ。

(3) $|s|+|t| \leqq 1$ である実数 s , t に対して、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とするとき、点 P の存在する範囲の面積を求めよ。

（近大・工）

5. 座標空間内に辺の長さが 1 の立方体があり、その頂点のうちの 2 つは $(0 , 0 , 0)$ および $(0 , 0 , \sqrt{3})$ にある。

(1) 残りの 6 つの頂点と xy 平面との距離のとりうる値をすべて求めよ。

(2) 上の 6 つの頂点のうち、xy 平面との距離が最も小さくなる頂点の 1 つが平面 $x+y-2z=0$ 上にあるとき、この点の座標を求めよ。

（山口大・理系）

6. 座標空間に 3 点 A(3 , 0 , 0) , B(0 , 1 , 0) , C(0 , 0 , 2) が与えられている。2 点 B , C を含むようなすべての平面のうち点 A からの距離が最大になるような平面の方程式を求めよ。

（岡山大・文系）

7. 空間内の 3 点を O(0 , 0 , 0) , A(3 , 0 , 3) , B(5 , 2 , 1) とするとき、

(1) 直線 AB の方程式は[　　　　]である。

方程式を求めよ.

(2) 線分 AB の中点 M を通り、直線 AB に垂直な平面 α の方程式は[　　　　]である。

(3) O から α に下した垂線と α との交点の座標は[　　　　]である。

(4) 線分 AB を一辺とする正三角形 ABC の中で、OC の長さが最小となるような点 C の座標は[　　　　]である。

（近大・工）

8. *xy* 平面上の点 P から出射した光線が $y+z-1=0$ で表される鏡面上の点 Q(0 , 0 , 1) で反射され、再び *xy* 平面上の点 R に到達する。点 P が放物線 $2y=-x^2-1$ 上を動くとき、点 R の軌跡を求めよ。

9. *xyz* 空間に球面 $S: x^2+y^2+z^2-2ax-2y+2az+2a^2-2=0$ と

平面$\pi: x+y-z-2=0$ がある。ただし、a は定数とする。次の問いに答えよ。

(1) S と π が接するときの a の値を求めよ。

(2) π に接する S のうちで,球面 $T: x^2+y^2+z^2-6x-4y+11=0$ と交わるものに対し、その交わりを含む平面 α の方程式を求めよ。

(3) α 上で T の内部に含まれる部分の面積を求めよ。

（横浜国大・教）

10. *xyz* 空間において、直線 $l: x=-y+2=\frac{z-1}{3}$, 球面 $S: x^2+y^2+(z-1)^2=2$ が与えられている。このとき、次の問に答えよ。

(1) l から S までの最短距離を与える l 上の点の座標は（　　　　）であり、最短距離は[　　]である。

(2) l を含み S に接する平面の方程式を求めよ。

（東洋大・工）

11. 座標空間の定点を A(1 , 2 , 3) とし、中心が C(3 , 4 , 5) ,半径が $\sqrt{14}$ の球面を S とする。

(1) 点 P が球面 S 上を動くとき、2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}$ の内積の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの点 P の座標を求めよ。ただし、O は座標の原点とする。

(2) (1)で求めた最大値を与える点 P を通り、ベクトル $\overrightarrow{CP}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

（和歌山大）

12. 空間において、3 点$(3 , 3 , 0)$, $(0 , 2 , 2)$, $(2 , 0 , 2)$ を通る平面αと球面 $x^2+y^2+z^2=10$ との交わりの円を C とする。

(1) 平面αの方程式と円 C の中心の座標を求めよ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき、P の z 座標の最大値と最小値を求めよ。

（福島県立医大）

13. 平面上に 3 点$(1,-1,-1)$, $(-2,3,4)$, $(3,7,1)$ がある。

(1) これらの 3 点を含む平面 α の方程式を求めよ。

(2) 点$(-1,-2,-4)$ を中心とし、この点から平面αへの距離の 2 倍の半径をもつ球面 S の方程式を求めよ。

(3) 平面 α と球面 S が交わってできる曲線を xz 平面へ正射影してできる曲線の方程式を求めよ。

（中部大・工）

14. $h>0$ とする。点$(1 , 0 , h)$ を通り球面$x^2+y^2+z^2=1$ に接する直線と、xy 平面との交点全体はどのような曲線をえがくか。h の値の範囲によって分類せよ。（曲線の方程式も求めること）

（類　大分大・教）

15. xyz 空間において、直線 l は点$(1 , 0 , 0)$ を通り、x 軸に垂直で、xy 平面となす角が$\frac{\pi}{6}$である。また、l は $y>0$ かつ $z>0$ の部分を通る。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 直線 l を y 軸のまわりに 1 回転して得られる曲面を S とする。S の xy 平面による切り口の曲線の方程式を求めよ。

（千葉大）

16. 空間に 2 直線 $l_1 : x+z=0 , y=0$　$l_2 : y+z= , x=0$ がある。次の問いに答えよ。

(1) l_1 , l_2 の方向ベクトルで、大きさが 1 のものをそれぞれ $\overrightarrow{v_1} , \overrightarrow{v_2}$ とする。ベクトル$\overrightarrow{v_1} , \overrightarrow{v_2}$ の成分を求めよ。

(2) 直線 l_1 , l_2 を含む平面をπとし、この平面に垂直な単位ベクトルを$\vec{n}$とする。ベクトル $\vec{n}$ の成分と平面πの方程式を求めよ。

(3) ベクトル$\vec{n}$ に平行で、原点 O を通る直線を l とする。点 Q(x , y , z) から l におろした垂線と 1 との交点を H とするとき、$\left|\overrightarrow{OH}\right|$ を求めよ。

(4) 点 Q(x , y , z) の座標が $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=a^2$ （ただし、a は正の定数とする）の関係を満たすとき、$\left|\overrightarrow{HQ}\right|$ を a を用いて表せ

（秋田大・鉱山）

解答

■スタンダード演習

1．(1) $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$　(2) $(8, -4, 4), (2, 2, -2)$

2．(1) $x + y - 2z - 6 = 0$　(2) $3x + y + 2z - 4 = 0$

3．(1) $k = \frac{1}{3}$　(2) $2x + 2y - z + 7 = 0$

4．$2x - 3y - 4z + 5 = 0$

5．(1) (3 , 2 , 5)　(2) (4 , 0 , 8)

6．(1) $\theta = \frac{\pi}{3}$　(2) $x - \frac{2}{3} = -\left(y - \frac{5}{3}\right) = -z$　(3) $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$　(4) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

7．$H(2, 1, 0)$　x 座標：$\frac{10}{3}, \frac{2}{3}$　y 座標：$\frac{9 \pm \sqrt{3}}{6}$

8．(1) $x + y + (2 - a)z = 2$　(2) $\frac{2\sqrt{a^2 - 4a + 6}}{2 - a}$　(3) $\frac{(2 - a^2)\sqrt{a^2 - 4a + 6}}{2(2 - a)}$

9．(1) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 29$　(2) $2\sqrt{5}$　(3) 10

10. (1) 中心$(1, 3, \pm 2)$ 半径 3　$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z \mp 2)^2 = 9$

(2) $(y - 3)^2 + (z \mp 2)^2 = 8$ $(x = 0)$

11. (1) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$　(2) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

12. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

13. (1) $(-2, 1, 0)$　(2) $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

14. (1) OA：OP = 2：1　AP = 6　(2) 2　(3) 半径 3　x 座標：$\frac{3}{4}$

15. (1) $\left(\frac{s}{t+1}, 0, \frac{t}{t+1}\right)$　(2) 放物線：$r = 1$　双曲線：$r > 1$　楕円：$0 < r < 1$

■標準～発展問題

1．(1) ねじれの位置　(2) $x + 7y - 5z = -1$　(3) $\frac{\sqrt{3}}{5}$　(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27/25 \\ 14/25 \\ 3/5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2．(1) $x - 2z = 3$　(2) $(-5, -1, -4)$　(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　(4) $\frac{1}{3}$

3．$2x + 3y + z = 6$　$(-1, -1, -1)$　$2x + y + 3z = -6$

4．(1) $\frac{2}{3}\pi$　(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$　(3) $12\sqrt{3}$

5．(1) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}$　　(2) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

6．$15x - 4y - 2z = -4$

7．(1) $x - 3 = y = \frac{z-3}{-1}$　　(2) $x + y - z - 3 = 0$　　(3) $\left(4 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 1, 2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

8．$x^2 + y^2 + 2y = 0, z = 0$　$(0, 0, 0)$を除く

9．(1) $2, -1$　　(2) $a = 2$ のとき $2x + 2y + 4z - 5 = 0$ ，$a = -1$ のとき交わらない

(3) $\frac{23}{24}\pi$

10. (1) $\mathrm{H}\left(\frac{2}{11}, \frac{20}{11}, \frac{17}{11}\right)$ ，$\frac{2}{11}\sqrt{110} - \sqrt{2}$　　(2) $4x - 5y - 3z + 13 = 0, x + y - 2 = 0$

11. (1) 最大値 40 $\mathrm{P}(4, 6, 8)$　最小値 12 $\mathrm{P}(2, 2, 2)$　(2) $x + 2y + 3z = 40$

12. (1) $x + y + 2z = 6, (1, 1, 2)$　　(2) $2 + \frac{2}{\sqrt{3}}, 2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$

13. (1) $2x - y + 2z = 1$　　(2) $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 36$

(3) $5x^2 + 8xz + 5z^2 + 6x + 12z - 18 = 0$

14. $h = 1$ のとき$y^2 = -2(x-1)$ で放物線

$h \neq 1$のとき$(1 - h^2)\left((x-1) - \frac{h^2}{1-h^2}\right)^2 - h^2y^2 = \frac{h^4}{1-h^2}$

よって $0 < h < 1$ のとき双曲線 ，$h > 1$ のとき楕円

15. (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

16. (1) $\overrightarrow{v_1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　　(2) $\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$x + y + z = 0$

(3) $\frac{|x+y+z|}{\sqrt{3}}$　　(4) $\frac{a}{\sqrt{3}}$