

整数問題

1. $\sqrt{30+\sqrt{b}}+\sqrt{30-\sqrt{b}}$ が自然数となるような自然数 b を全て求めよ。

(滋賀医科大)

2. (1) 整数 a が 3 の倍数でなければ a^2 を 3 で割った余りは 1 であることを示せ。
(2) $a^2 - 2b^2$ が 3 の倍数であるような整数 a, b はともに 3 の倍数であることを示せ。
(3) $a^2 - 2b^2 + 3c^2 - 6d^2 = 0$ を満たす整数 a, b, c, d は $a = b = c = d = 0$ のみであることを示せ。

(明治大・理工)

3. x は 0 でない実数とする。

- (1) $x + \frac{1}{x}$ が整数ならばすべての正の整数 n に対して $x^n + \frac{1}{x^n}$ も整数であることを示せ。
(2) $x - \frac{1}{x}$ が 0 以外の整数ならば $x^2 - \frac{1}{x^2}$ は整数でないことを示せ。

(一橋大)

4. xy 平面上、 x 座標, y 座標がともに整数であるような点 (m, n) を格子点とよぶ。各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており、傾き $\frac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

(東京大・理科)

解答

1. 500, 896

2. (1) $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$ より (2) 略 (3) 略

3. (1) 略 (2) 略

4. $\frac{\sqrt{29}}{58}$