

# 関数—1 変数と 2 変数

1.  $x$  の関数  $f(x) = ax + 3a + 1$  がある。

(1)  $-1 \leq x \leq 1$  において、 $f(x)$  が正の値も負の値もとるならば、 $[ \quad ] < a < [ \quad ]$  である。

(2)  $-\frac{1}{3} < a < 1$  であるすべての  $a$  に対して、 $f(x)$  がつねに正となるような  $x$  の範囲は  $[ \quad ] \leq x \leq [ \quad ]$  である。

(東北工大, 一部省略)

2.  $a, b, c, p, q$  は実数の定数で、 $a \geq b \geq c, p \geq q$  をみたすものとする。関数  $f(x)$  を  $f(x) = 3(ax + bp + cq) - (a + b + c)(x + p + q)$  と定めるとき、 $x \geq p$  なる任意の実数  $x$  に対して  $f(x) \geq 0$  となることを証明せよ。

(甲南大・地方, 一部省略)

3.  $f(x) = x^2 - ax + 1$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) の最大値を  $F(a)$  とし、  
 $g(x) = -x^2 + ax + 2a$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) の最小値を  $G(a)$  とする。

(1)  $0 \leq x \leq 1$  の範囲のすべての  $x$  に対して、 $f(x) \leq g(x)$  となるような  $a$  の値の範囲を求めよ。

(2)  $F(a) \leq G(a)$  となるような  $a$  の値の範囲を求めよ。

(中央大・法, 改題)

4.  $t$  が実数のとき、 $f(x) = x^4 + 2tx^2 + 2t^2 + t$  の最小値を  $m(t)$  とする。 $m(t)$  の最小値は  $[ \quad ]$  である。

(工学院大)

5. 2次式  $F(x, y) = (3y - x + 1)^2 + x^2 - 4x + 6$  について、次の問いに答えよ。

(1)  $x, y$  がすべての実数値をとるとき、 $F(x, y)$  の最小値と、それを与える  $x, y$  の値を求めよ。

(2)  $x, y$  が  $3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1$  を満たすとき、 $F(x, y)$  の最大値および最小値を求めよ。

(広島県立大・経営, 後期)

6.  $a, b$  は実数で  $a + b \leq 1$  を満たすものとし、 $f(x) = x^2 + (2a + 1)x + b$  の  $0 \leq x \leq 1$  における最小値を  $m$  とおく。 $m$  を最大にする  $a, b$  の値を求めよ。

(富山県立大・エ, 後期)

7.  $x, y$  が  $y = x^2 - [x]^2 + 3$  ( $-5 \leq x < 5$ ) をみたす。ただし、 $[x]$  は  $x$  をこえない最大の整数を表す。

(1)  $y$  のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)  $k = y - 3x$  のとりうる値の範囲を求めよ。

(日大・生産工, 改題)

8.  $x^2 + 2(y - 2)^2 = 18$  のとき、 $2x^2 + 3y^2$  の最大値は[     ], 最小値は[     ]である。

(芝浦工大)

9. 実数  $x, y$  が  $x^2 + y^2 + xy = 3$  を満たしながら変化するとき、 $x + y$  のとり得る値の範囲を求めよ。

(長崎総合科学大)

10. ある病院の食事では、1週間1人当たりの食肉の摂取量は少なくとも脂身 0.1kg, 赤身 0.1kg が必要であるという。牛肉, 豚肉の脂身と赤身の割合および価格が下表で示されるものとする。

	脂身	赤身	価格 (円/100g)
牛肉	0.4	0.6	300
豚肉	0.6	0.4	240

この病院が 200 人の患者をかかえていて、必要な食肉の摂取量を牛肉と豚肉でまかなうとした場合、1週間分の購入費用を最小にするにはそれぞれ何 kg 購入したらよいか。

(明治大・経営)

11. (1)  $f(x) = \frac{2x+k}{x-1}$  ( $k$ は定数) の  $3 \leq x \leq 1$  における最大値が 7 のとき、 $f(x)$  の最小値は [     ]である。

(2)  $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$  の地域を求めよ。

(3)  $f(x) = \frac{x}{|x^2-3x|+x+1}$  の最大値を求めよ。

(順に千葉工大, 立正大・法, 同志社大・商)

12. 関数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$  ( $x \geq 1$ ) の逆関数を  $h(x)$  とするとき、

(1)  $h(x)$  を求めよ。

(2)  $h(x) \geq f(x)$  をみたす  $x$  の範囲を求めよ。

(阪南大・経, 改題)

13. ある自動車は速さ  $v$  km/時で走るとき、ガソリンを  $\frac{100}{100-v}$  l/時消費する。

ただし、 $0 < v < 100$  である。

- (1) 1l のガソリンでもっとも遠くまで走るには速さ  $v$  をいくりにすればよいか。
- (2) 1l のガソリンで 20km 離れた A 町まで行きたい。一定の速さで走るものとするとき、どのくらいの速さならば A 町に着くことができるか。

(立教大・経)

14. 半径 1 の円 O 内に点 A をとり、A を通る弦 PQ を考える。A と P と Q が動くとき、

$\frac{1}{PA} + \frac{1}{QA}$  の最小値を求めよ。

(お茶の水大・理)

解答

1. (1)  $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{4}$  (2)  $-4 \leq x \leq 0$
2. 略
3. (1)  $a \geq \frac{3}{4}$  (2)  $a \geq \frac{3}{4}$
4.  $-\frac{1}{4}$
5. (1)  $x = 2, y = \frac{1}{3}$  (2) 最大值 27 最小值 3
6.  $a = -1, b = 2$
7. (1)  $-6 < y < 12$  (2)  $-9 \leq y < -1, -\frac{1}{4} \leq y \leq 0, 1 < y \leq 18$
8. 最大值 75 最小值 3
9.  $-2 \leq x + y \leq 2$
10. 29kg ずつ
11. (1) 3 (2)  $f(x) \geq 3$   $f(x) \leq -1$  (3)  $\frac{3}{4}$
12. (1)  $h(x) = \sqrt{2x-1} + 1$  ( $x \geq \frac{1}{2}$ ) (2)  $1 \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$
13. (1)  $v = 50$  (2)  $50 - 10\sqrt{5} \leq v \leq 50 + 10\sqrt{5}$
14. 2