

逆手流・その2

1. a, b, c を正の定数とする。 $ax + by + cz = 1$ をみたす実数 x, y, z のうち、 $\min\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right\}$ を最大にするような x, y, z とその最大値を求めよ。ただし、 $\min\{p, q, r\}$ は p, q, r のうちの最小の値を表す。

(一橋大)

2. 実数 t の値によって定まる 2 点 $P(t-1, 0), Q(t, t^2)$ がある。

(1) t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、直線 PQ が通過する範囲を図示せよ。

(2) t が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過する範囲を図示せよ。

3. 実数 k がいろいろと動くとき、 x の方程式 $x^2 + kx + k^2 + 3k - 9 = 0$ の実数解がとり得る値の範囲を求めよ。

4. 実数 p, q に対して、下の 2 条件①, ②をみたす三角形 ABC が存在するための必要十分条件を求めよ。

$$\textcircled{1} |\overline{BC}| = q \quad \textcircled{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = p$$

ただし、 $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ は \overline{AB} と \overline{AC} の内積をあらわす。

(京都大)

5. xy 平面上の円 $3x^2 + y^2 = 1$ の外からこの円に 2 本の接線を引く。その接点を Q, R とし Q と R によって分けられた円の弧のうち P に近い方を \widehat{QR} とする。このとき、つぎの 2 つの条件

(i) \widehat{QR} は点 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ を含む

(ii) $\angle QPR \geq 90^\circ$

をみたすような P の存在範囲を図示し、その面積を求めよ。

6. 正方形 $ABCD$ がある。辺 AB, AD と交わる (共有点をもつ) 直線に関する点 A の対称点 P の描く領域を図示せよ。

7. 空間内に3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ がある。三角形 ABC の内部を動点 M がくまなく動く。 M から x, y, z 軸に下した垂線の足を P, Q, R とする。三角形 PQR の内部が通過する範囲を求めよ。尚、内部には周は含めないものとする。

解答

1. $(x, y, z) = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}(a, b, c)$

2. (1) 略 (2) 略

3. $3 \leq x \leq 5$

4. $q > 0, 4p + q^2 > 0$

5. $\frac{4}{9}\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}$