

空間における平面図形

1. 空間内に原点 O , $P(1, 1, 2)$, $Q(1, 0, 1)$ の 3 点を通る平面 π を考える。 P を中心とする半径 1 の π 上の円 C に、 π 上で O からひいた接線の接点の座標を求めよ。

2. (1) 空間のベクトル $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して、

ベクトル $\overrightarrow{OP} = \cos \theta \overrightarrow{OM} + \sin \theta \overrightarrow{ON}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) の点 P はどんな図形を描くか。

(2) 上で求めた図形を x, y 平面に正射影してできる図形のグラフを描け。

3. xyz 空間において、原点が $A(0, 0, 1)$ で xy 平面との交線が円 $x^2 + y^2 = 1$ である直円錐を S とする。

(1) 円錐 S の方程式を求めよ。

(2) 円錐 S と平面 $\alpha : y = z$ の交線 C は放物線であるが、この放物線 C の焦点の座標を求めよ。

(3) 円錐 S と平面 α と xy 平面の $y \geq 0$ の側で囲まれる立体 V の体積を求めよ。

解答

$$1. \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \pm \sqrt{15} \\ 5 \mp \sqrt{15} \\ 10 \end{pmatrix}$$

2. (1) 平面 OMN 上で、原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の円 (2) 略

$$3. (1) x^2 + y^2 = (z - 1)^2 \quad (2) \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad (3) \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$$