



数式における積分

1. 次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin x \, dx \quad (2) \int_0^{\pi} x^n (\pi - x)^n \cos x \, dx \quad (n \text{ は自然数})$$

(湘南工科大)

2. (1) $-\pi < x < \pi$ とする。このとき $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくと、 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$

となることを示せ。

(2) 不定積分 $\int \frac{1}{\sin x} dx$ を計算せよ。

(3) $\int_{\frac{1}{12}\pi}^{\frac{5}{12}\pi} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx$ の値を求めよ。

(北見工大)

3. (1) 次の不定積分を計算せよ。

$$(a) \int \cos^2 x \, dx \quad (b) \int \sin x \cos x \, dx \quad (c) \int x \cos x \, dx$$

(2) 積分 $I = \int_{-\pi}^{\pi} (|x| - a \cos x)^2 dx$ を最小にするように a の値を求めよ。

(成蹊大・工)

4. $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{\sqrt{k(k+1)}}$ とするとき、 $S_n(x) = \int_0^{2\pi} \{f_n(x)\}^2 dx$ を計算し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ の値を求めよ。

(九州歯科大)

5. 自然数 m, n に対して、 $I_{m,n} = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$ を考える。

(1) $I_{m,1}$ を求めよ。

(2) $I_{m,n+1}$ を $I_{m+1,n}$ を用いて表せ。

(3) $I_{m,n}$ を求めよ。

(東京工科大)

6. 連続な関数 $f(x)$ が条件

(i) すべての x に対して $f(x+1) = f(x)$

(ii) $y = f(x)$ のグラフは直線 $x = \frac{1}{2}$ に関して対称

を満たしているとする。

(1) $t = 1 - x$ において $\int_0^1 xf(x) dx$ を置換積分することにより、

$\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 xf(x) dx$ となることを証明せよ。

(2) $f(x+k) = f(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) となることを証明せよ。

(3) $\int_{k-1}^k xf(x) dx = (2k-1) \int_0^1 xf(x) dx$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) となることを証明せよ。

(4) $\int_0^k xf(x) dx = k^2 \int_0^1 xf(x) dx$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) となることを証明せよ。

(5) $\int_0^k x|\sin \pi x| dx$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。

(富山大・医)

7. 連続な関数 $f(x)$ に対して、 $g(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^2 dt$ とおく。

(1) $g(x)$ の第 3 次導関数 $g'''(x)$ を $f(x)$ で表せ。

(2) $f(x) = |x|$ のときの $g(x)$ を求めよ。

(愛知工大)

8. t の関数 $f(t)$ を、 $f(t) = \int_0^\pi |\sin x - t| dx$ で定める。

(1) $t = \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) のとき、 $f(t)$ を θ の関数として表せ。

(2) t が実数全体を動くとき、 $f(t)$ の最小値を求めよ。

(茨城大)

解答

1. (1) 4 (2) 0

2. (1) 略 (2) $\log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$ (3) $\frac{\log 3}{2\sqrt{2}}$

3. (1) (a) $\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$ (b) $-\frac{\cos 2x}{4} + C$ (c) $x \sin x + \cos x + C$ (2) $a = -\frac{4}{\pi}$

4. $S_n = \pi \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pi$

5. (1) $\frac{1}{m}$ (2) $\frac{n}{m} I_{m+1, n}$ (3) $\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$

6. (1)~(4) 略 (5) $\frac{k^2}{\pi}$

7. (1) $g'''(x) = 2f(x)$ (2) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{12} & (x \geq 0) \\ -\frac{x^4}{12} & (x < 0) \end{cases}$

8. (1) $4\theta \sin \theta + 4 \cos \theta - \pi \sin \theta - 2$ (2) $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} - 2$