

不等式－比較の原則

1. (1) $x + y = a$ のとき、 $x^2 + y^2$ と $\frac{a^2}{2}$ の大小関係をしらべよ。

(2) $x + y + z + u = a$ のとき、 $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ と $\frac{a^2}{4}$ の大小関係をしらべよ。

(愛知学院大)

2. a, p, q は実数で、 $p \geq 0, a \leq 1$ である。このとき、 $pa + q = 1, p + q \leq 1$ が成り立つならば、 $q = 1$ または $a = 1$ であることを示せ。

(甲南大・法)

3. (1) $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, x_3 \geq 2$, $x_1 + x_2 + x_3 = x_1 x_2 x_3$ を満たす x_1, x_2, x_3 は存在しないことを証明せよ。

(2) n を 3 以上の整数とすると、 $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \dots, x_n \geq 2$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 x_2 \dots x_n$ を満たす $x_1, x_2, \dots, x_n$ は存在しないことを証明せよ。

(横浜国大・経営)

4. x の不等式 $x^2 - kx + 2k - 1 < 0$ (k は整数の定数) をみたす整数 x が 4 だけであるとき、 $k = [\quad]$ である。

(千葉工大)

5. 不等式 $x^2 + ax - 2|x| + 9 > 0$ は、 $[\quad] < a < [\quad]$ のときに、すべての x の実数値に対して成立する。

(明海大)

6. 実数 x, y に関する不等式 $-x^2 + 3ax - 9 < y < x^2 - (a - 4)x + 9$ について、

(1) どんな実数 x についても、その x に対して上の不等式を満足するような実数 y が存在するような a の範囲は $[\quad] < a < [\quad]$ である。

(2) ある適当な y をとると、上の不等式がすべての実数 x に対して成立するような a の範囲は、 $[\quad] < a < [\quad]$ である。

(朝日大・経営)

7. $-1 \leq x \leq 1$ において、つねに $3(5a + 5\sqrt{1-a^2} - 1)x^2 - 3x - 15(a + \sqrt{1-a^2}) + 8 \geq 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

(神戸大・理系)

8. (1) 次の等式を証明せよ。

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

(2) x, y, z を正の実数とすると、 $\frac{x+y+z}{3} \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ であることを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。

(滋賀医大)

9. (1) a, b, c, A, B, C が実数のとき、 $(a^2 + b^2 + c^2)(A^2 + B^2 + C^2) \geq (aA + bB + cC)^2$ が成り立つことを証明しなさい。また等号が成り立つのはどのような場合か。

(2) $a > 0, b > 0, c > 0, a + b + c = 1$ のとき、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ の最小値を求めなさい。また、そのときの a, b, c の値を求めなさい。

(3) $a^2 + b^2 + c^2 = 2, p^2 + q^2 + r^2 = 3$ のとき、 $[\quad] \leq (ap + bq + cr)^2 \leq [\quad]$

(1)(2) 四日市大 (3) 中部大・工)

10. $a + b = 1, a > 0, b > 0$ を満たす a, b と関数 $f(x) = px^2 + qx + r$ が与えられている。このとき、任意の実数 u, v に対して、 $f(au + bv) \leq af(u) + bf(v)$ が成立するための p, q, r に関する条件を求めよ。

(愛知大・法)

11. $x, y, z > 0, x + y + z = 1$ のとき、 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right)$ の最小値は $[\quad]$ である。

(東京情報大)

12. a, b, c を正の実数とすると、不等式 $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq (1 + abc)^2$ が成り立つことを示せ。

(学習院大・法)

13. 次の問いに答えよ。

(1) 任意の実数 a, b に対し、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq (ab + 1)^2$$

(2) 任意の実数 a, b, c に対し、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (ab + 1)(bc + 1)(ca + 1)$$

(松阪大)

14. $2n+1$ 個の正の数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, k$ があり、

$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_n}{b_n} < k$ を満たすとき、 $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n} < k$ が成り立つことを証明せよ。

(滋賀大)

15. x, y を正の実数, n を正の整数とすると、次の不等式を証明せよ。

$$x^n + (n-1)y^n \geq nxy^{n-1}$$

(学習院大・文)

解答

1. (1) $x = y = \frac{a}{2}$ ならば $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$ そうでないなら $x^2 + y^2 > \frac{a^2}{2}$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 \geq \frac{a^2}{4}$ 等号成立は $x = y = z = u$

2. 3. 略

4. $k = 8$

5. $-4 < a < 4$

6. (1) $-2 < a < 4$ (2) $-2 < a < \frac{14}{5}$

7. $-1 \leq a \leq \frac{1-\sqrt{7}}{4}$

8. 略

9. (1) $bA = aB, cB = bC, aC = cA$ (2) $a = b = c = \frac{1}{3}$ のとき最小値 9

(3) 順に 6, 0

10. $p \geq 0$

11. 64

12~15. 略