

2 次曲線の典型問題をマスターしよう

■スタンダード演習

◆放物線

1. C を放物線 $y = \frac{1}{4a}x^2$ ($a > 0$) とし、 F を点 $(0, a)$ とする。 C 上に頂点以外の点 P をとる。 P を通る C の接線を l , l と y 軸との交点を T , P を通り y 軸に平行な直線を g とする。

(1) $\triangle FTP$ は二等辺三角形であることを示せ。

(2) l と g のなす角は FP と l のなす角に等しいことを示せ。

(津田塾大・国際関係)

2. x 軸を軸とし、点 $(1, 0)$ を焦点とする放物線が直線 $y = x + k$ ($k \neq -1$) に接するとき、この放物線の準線の方程式を求めよ。

(大分大・教)

3. 放物線 $x^2 = 4py$ ($p > 0$) の焦点を通り、傾き m の直線 l と、この放物線との交点を P, Q とする。この放物線に対して、点 P, Q におけるそれぞれの接線の交点を R とする。 $\triangle PQR$ の面積 S を m, p で表し、その面積が最小となるように、直線 l の傾きを定めよ。

(聖マリアンナ医大)

◆だ円

4. $\triangle ABC$ において、頂点 A が $(-4, 0)$, 頂点 B が $(4, 0)$ にあり、頂角 A が 90° のときには $AC = \frac{9}{5}$ となる。いま、頂点 A, B を固定したまま、 $AC + BC$ が一定になるようにして頂点 C を動かす。このとき、

(1) $\angle A = 120^\circ$ ならば、 $AC = [\quad]$

(2) 頂点 C の軌跡は $\frac{x^2}{[\quad]} + \frac{y^2}{[\quad]} = 1$ で表される。

(3) 原点を O としたとき、 OC の最小値は $[\quad]$ で、このとき $\triangle ABC$ の面積は $[\quad]$ である。

(明治大)

5. 点 $(3, 3)$ を通り、だ円 $x^2 + 2y^2 = a$ ($a > 0$) に接する 2 本の直線が直交するとき、 $a = [\quad]$ であり、2 本の直線の傾きは $[\quad] - \sqrt{[\quad]}$, $[\quad] + \sqrt{[\quad]}$ である。

(慶大・環境情報)

6. だ円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ と第 1 象限の点 P で接する直線を l とし、 l と x 軸との交点を Q、 l と y 軸との交点を R とする。O を原点とし、三角形 OPQ と三角形 OPR の面積の比が 1 : 3 であるとき、点 P の座標を求めよ。

(福島県医大)

7. 楕円 $4x^2 + y^2 = 1$ と、直線 $y = x + n$ が 2 つの異なる点で交わるための必要十分条件は $|n| < [\quad]$ である。このとき、P、Q をその 2 つの交点とすると P、Q の中点は直線 $y = -[\quad]x + [\quad]$ 上にあり、 $PQ^2 = -[\quad]n^2 + [\quad]$ となる。

(日大・国際関係)

8. だ円 $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ と直線 $l: y = x - 6$ がある。 l と直交する E の 2 つの接線を f, g とし、それらと E との接点を F、G とする。F、G で分けられるだ円の 2 つの弧のうち、 l に近い方を c とする。 c, l, f, g で囲まれる領域の面積を求めよ。

(早大・教)

◆双曲線

9. 双曲線 $C: 4x^2 - y^2 + 8y - 20 = 0$ と直線 $l: y = mx$ がある。

(1) C の漸近線の方程式は、 $y = \pm [\quad]x + [\quad]$ である。

(2) l が C に接するとき、 $m = \pm \sqrt{[\quad]}$ となる。

(3) l が C と相異なる 2 点 P、Q で交わるとき、線分 PQ の中点 R の x 座標は $\frac{[\quad]m}{m^2 - 4}$ であるか

ら、 m が変化するとき、R は双曲線 $(x - [\quad])^2 - \frac{(y - [\quad])^2}{4} = -1$ の上を動く。

(東北工大)

■標準～発展問題

1. 点 $P(\sqrt{c}, 0)$ ($c \geq 0$) を通り、だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) と接する直線が、 $y \geq 0$ で y 軸と交わる点を Q とする。

(1) 線分 PQ の長さ l を求めよ。

(2) (1) で求めた l について、不等式 $l \geq a + b$ が成り立つことを証明せよ。

(大分大・工)

2. xy 平面において P は直線 $y = mx$ ($m \neq 0$) 上の点で、かつ、だ円 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の外側にあるものとする。点 P から、だ円 E にひいた 2 本の接線の接点を A, B とすると、直線 AB の傾きは[]である。直線 AB と平行な直線で、だ円 E と接するものは 2 本あるが、それぞれの接点を C, D とするとき、直線 CD の方程式は[]であり、線分 CD の長さは[]である。また、直線 AB と直線 CD のなす角を θ ($0 < \theta < \pi$) とすると、 $\sin \theta = []$ である。

四角形 $ACBD$ の面積を S とすると、点 P が上の条件を満たして動くとき、 S も変化する。 $S < k$ を満たす定数 k の最小値は[]である。

(立命館大・理工)

3. だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) のおよび放物線 $y^2 = x$ の第 1 象限における交点でのそれぞれの接線を l, m とし、これらと x 軸との交点を P, Q とする。

(1) l, m が直交するような a, b の関係を求めよ。

(2) (1)のとき線分 PQ の長さが 1 となるような a, b の値を求めよ。

(東京電機大・理工)

4. 点 $P(p, q)$ から双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) に直交する 2 本の接線が引けるとき、点 P の軌跡を求めよ。

(浜松医大)

5. 原点 $(0, 0, 0)$ を通る平面 $x - y + 2z = 0$ が、球 $x^2 + 2x + y^2 - 2y + z^2 - 4z = 0$ と交わってできる円を C とする。

(1) 球の中心と半径を求めなさい。

(2) 円 C の面積を求めなさい。

(3) 円 C を xy 平面に正射影するとき、 xy 平面上にできる図形を書きなさい。また、図形の中心の座標も明記しなさい。

(共立薬大)

6. 点 $A(-1, -1, 4)$ から球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + 2 = 0$ に任意に接線 l を引くとき、その接点を P とし、さらに l が xy 平面と交わるとき、その交点を Q とする。

(1) l が動くとき、点 P はひとつの平面上を動く。その平面の方程式を求めよ。

(2) l が動くとき、点 Q の描く xy 平面上の曲線 C の方程式を求めよ。

(3) 曲線 C を xy 平面上で原点のまわりに $-\frac{\pi}{4}$ 回転することにより、 C が放物線であることを確かめ、 C の準線が(1)で求めた平面上にあることを示せ。

(札幌医大)

解答

■スタンダード演習

1. 略

2. $x = -k$

3. $S = 4p^2(\sqrt{m^2 + 1})^3 \quad m = 0$

4. (1) $\frac{9}{7}$ (2) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ (3) 最小値 3 $\triangle ABC = 12$

5. $a = 12$ 傾き $= -3 \pm \sqrt{10}$

6. $(\sqrt{3}, \frac{3}{2})$

7. $|n| < \frac{\sqrt{5}}{2} \quad y = -4x \quad PQ^2 = -\frac{32}{25}n^2 + \frac{8}{5}$

8. $30 - 6\pi$

9. (1) $y = \pm 2x + 4$ (2) $m = \pm\sqrt{20}$ (3) $x^2 - \frac{(y-2)^2}{4} = -1$

■標準～発展問題

1. (1) $\sqrt{\frac{c^2 - a^2c + b^2c}{c - a^2}}$ (2) 略

2. 順に $-\frac{1}{4m}$, $y = mx$, $4 \cdot \sqrt{\frac{m^2+1}{4m^2+1}}$, $\frac{4m^2+1}{\sqrt{16m^2+1}\sqrt{m^2+1}}$

3. (1) $b = \sqrt{2}a$ (2) $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $b = \frac{\sqrt{6}}{4}$

4. $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ (漸近線 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 上の点を除く)

5. (1) 中心 $(-1, 1, 2)$ 半径 $\sqrt{6}$ (2) $\frac{16}{3}\pi$ (3) $B'(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0)$

6. (1) $x + y - z = -2$ (2) $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$ (3) 略