2018 年	北海道大学　数学入試問題	

＜文系＞

１．$t>1$ とする。△ABC において $\mathrm{AB}=\sqrt{t^2+1}$, $\mathrm{BC}=t-1$, $\mathrm{AC}=\sqrt{2}$ とし、点 O を△ABC の外心とする。

(1) ∠ACB の大きさを求めよ。

(2) 直線 CO と直線 AB が垂直に交わるときの t の値を求めよ。

２．a と b は実数とし、関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を m とする。

(1) m を a と b で表せ。

(2) $a+2b \leqq 2$ を満たす a と b で m を最大にするものを求めよ。また、このときの m の値を求めよ。

３．赤色, 青色, 黄色のサイコロが 1 つずつある。この 3 つのサイコロを同時に投げる。赤色, 青色, 黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R , B , Y とし、自然数 s , t , u を $s=100\mathrm{R}+10\mathrm{B}+\mathrm{Y}$, $t=100\mathrm{B}+10\mathrm{Y}+\mathrm{R}$, $u=100\mathrm{Y}+10\mathrm{R}+\mathrm{B}$ で定める。

(1) s , t , u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ。

(2) $s>t>u$ となる確率を求めよ。

４．p を実数とする。関数 $y=x^3+px^2+x$ のグラフ C_1 と関数 $y=x^2$ のグラフ C_2 は、$x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつとする。

(1) このような p の値の範囲を求めよ。

(2) C_1 と C_2 の $x>0$ の範囲にある共有点の x 座標をそれぞれ α , β ($\alpha<\beta$)とし、$0 \leqq x \leqq \alpha$ と $\alpha \leqq x \leqq \beta$ の範囲で C_1 と C_2 が囲む部分の面積をそれぞれ S_1 , S_2 とする。$\mathrm{S}_1=\mathrm{S}_2$ となるような p の値を求めよ。また、このときの S_1 の値を求めよ。

＜理系＞

１．座標空間の 4 点 $\mathrm{A}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}(0, 0, 1)$, $\mathrm{C}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$,

$\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ に対し、$\vec{p}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{q}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく。ただし、O は原点, s と t は実数とする。

(1) $|\vec{p}|, |\vec{q}|$ と内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を s , t で表せ。

(2) $t=\frac{1}{2}$ のとき、ベクトル $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ となるような s の値を求めよ。

(3) s と t が実数を動くとき、$|\vec{p}-\vec{q}|$ の最小値を求めよ。

２．$z+\frac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

(1) D を複素数平面上に図示せよ。

(2) k を実数とする。D に属する z で方程式

$$k\left(z+\frac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\frac{4}{z}\right)$$

を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし、i は虚数単位を表す。

３．数字の 2 が書かれたカードが 2 枚, 同様に、数字の 0 , 1 , 8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚, あわせて 8 枚のカードがある。これらから 4 枚を取り出し、横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし、0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は、n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える。例えば、左から順に 0 , 0 , 1 , 1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である。

(1) a , b , c , d は整数とする。$1000a+100b+10c+d$ が 9 の倍数になることと $a+b+c+d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ。

(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ。

(3) n が偶数であったとき、n が 9 の倍数である確率を求めよ。

４． 座標平面上に 3 点 O(0 , 0) ,A$\left(\dfrac{15}{2}, 0\right)$, B(11 , 11)がある．条件

$$BQ \geqq OQ \geqq 2AQ$$

を満たす点 Q(x , y)の全体を D とする.

(1) D を座標平面上に図示せよ。また、BQ = OQ = 2AQ となるすべての点 Q の座標を求めよ。

(2) $0 < p \leqq 11$ とし、P を点(p , 11)とする。条件 OQ≧PQ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。

５． 2 つの関数

$$f(\mathrm{x}) = \cos x\ ,\ g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

がある。

(1) $0 \leqq \mathrm{x} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、不等式 $\dfrac{2}{\pi}x \leqq \sin \mathrm{x}$ が成り立つことを示せ。

(2) $0 \leqq \mathrm{x} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき、不等式 $g(x) \leqq f(x)$が成り立つことを示せ。

(3) $0 \leqq \mathrm{x} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において、2 つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$および y 軸が囲む部分の面積を求めよ。