2019 年	北海道大学　数学入試問題	

＜文系＞

１． p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 A(−1 , 2 , 0) ，B(2 , −2 , 1) ，P(p , −1 , 2)があり、3 点 O , A , B が定める平面を α とする。また、点 P から平面 α に垂線を下ろし、α との交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 a , b を p を用いて表せ。

(2) 点 Q が△OAB の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

２． x を正の実数とし、座標平面上に 3 点 A(x , 0) , B(−2 , 2) , C(−3 , 3)をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\tan\theta$ を x で表せ。
(2) $x > 0$ における $\tan\theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

３． n を自然数とする。数列 2 , 1 , 2 , 1 , 1 のように各項が 1 または 2 の有限数列（項の個数が有限である数列）を考える。各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする。例えば、$n = 1$ のときは、1 項からなる数列 1 のみである。したがって、$s_1 = 1$ となる。$n = 2$ のときは、1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列 1 , 1 の 2 つである。したがって、$s_2 = 2$ となる。
(1) s_3 を求めよ。
(2) $n = 3$ のとき、s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ。
(3) 3 以上のすべての n の対して $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta (s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α , β の組（ α , β ）を 1 組求めよ。
(4) s_n を求めよ。

４． 実数 a , b , c に対し、関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ を考える。1 次関数 $g(x)$があり、$f(x)$とその導関数 $f'(x)$ は、すべての x に対し等式 $f(x) = f'(x)\,g(x) - 6x$ を満たしているとする。
(1) b と c を a で表せ。
(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつように。a の値の範囲を定めよ。

＜理系＞

１．p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$，$B(2, -2, 1)$，$P(p, -1, 2)$があり、3 点 O , A , B が定める平面を α とする。また、点 P から平面 α に垂線を下ろし、α との交点を Q とする。

(1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。

(2) 点 Q が△OAB の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

２．n を自然数とし、$a_n = n(n+1)$とする。さらに、a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。

(1) d_n は偶数であることを示せ。

(2) d_n は 8 で割り切れないことを示せ。

(3) p を 5 以上の素数とするとき，d_n は p で割り切れないことを示せ。

(4) $d_n \leqq 12$ を示せ。また、$d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ。

３．t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。$0, \dfrac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数 $f(x) = \dfrac{x+t}{x(1-tx)}$ を考える。

(1) $f(x)$は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。

(2) $f(x)$の極大値を与える x の値を α，極小値を与える x の値を β とし、座標平面上に 2 点 $P(\alpha, f(\alpha))$，$Q(\beta, f(\beta))$ をとる。t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき、線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

４．n を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり、どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。 A と B の 2 人のうち、A は箱 X から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し、もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし、もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば、その札を箱 Y に戻し、再び箱 Y から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を B の得点とする。

(1) m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。

(2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。

５． $f(x)$を区間$[\,0\,,\pi\,]$で連続な関数とする。関数 $f_1(x)\,,f_2(x)\,,\,\cdots$ を関係式$f_1(x)=f(x)$,
$f_{n+1}(x)=2\cos x+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\sin(x-t)\,dt$ （$n=1\,,2\,,3\,,\,\cdots\cdots$ ）により定める。さらに、自然数 n に対して$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\sin t\,dt$, $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\cos t\,dt$ とおく。

(1) $a_{n+1}\,,\,b_{n+1}$ を $a_n\,,\,b_n$ を用いて表せ。

(2) $c_n=a_n-1$ とおく。このとき、$c_{n+2}=-c_n$が成立することを示し、一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。

(3) $a_n\,,\,b_n$ が n によらない定数となるような$f(x)$を 1 つ求めよ。

解答

<文系>

１．(1) $\{a_n\} = n\,(\,n + 2\,)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

２，(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{3}{8}\vec{a}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$　(3)