2020年	北海道大学　数学入試問題	

＜文系＞

１． k を正の実数とする。座標平面上に直線 $l:\ y=kx+1$ と放物線 $C: y=x^2$ がある。l と C の交点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする。さらに、線分 PQ の垂直二等分線を m とし、m と C の交点のうち x 座標の小さい方を R，大きい方を S とする。

(1) 線分 PQ の中点 M の座標を k を用いて表せ。

(2) k が正の実数を動くとき、線分 RS の中点 N の y 座標が最小となる k の値を求めよ。また、そのときの P と Q の座標を求めよ。

２． 関数 $f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta-\sin\theta+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ を考える。

(1) $t=\sin\theta-\cos\theta$ とおく。$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値、およびそのときの θ の値を求めよ。

(3) a を実数の定数とする。$f(\theta)=a$ となる θ がちょうど 2 個であるような a の範囲を求めよ。

３． n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ とする。

(1) $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

４． 座標平面上に 2 つの放物線 $C_1: y=2x^2$ と $C_2: y=-x^2+2x-\dfrac{19}{8}$ がある。

(1) C_1 と C_2 の両方に接する直線をすべて求めよ。

(2) (1)で求めた直線のうち傾きが負であるものを l とする。C_1, x 軸および l が囲む部分の面積を求めよ。

＜理系＞

１．三角形 ABC について $|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6}$ が成立しているとする。三角形 ABC の外接円の中心を O とし、直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ が成り立つような実数 s , t を求めよ。

(3) 直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。

２．座標平面上の 2 点 $\left(\frac{1}{16}, 0\right)$，$\left(0, \frac{1}{9}\right)$ を通る直線 l を考える。

(1) l 上にある格子点の座標をすべて求めよ。ただし、格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである。

(2) l 上の格子点のうち、原点との距離が最小となる点を A とする。また、l 上の A 以外の格子点のうち、原点との距離が最小となる点を B とする。さらに、A の x 座標と B の y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点を C とする。三角形 ABC の内部および周上にある格子点の個数を求めよ。

３．n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ とする。

(1) $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

(3) $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

４．α を $0<\alpha<1$ を満たす実数とし、$f(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\alpha$, $a_{n+1}=f(a_n)$ (n = 1 , 2 , 3 , …) で定義されるとき、次の問に答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して、$0<a_n<1$ かつ $a_{n+1}>a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) $b_n=\dfrac{1-a_{n+1}}{1-a_n}$ とおくとき、すべての自然数 n に対して、$b_{n+1}<b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ および(2)で定めた $\{b_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。

５．a を正の定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする。

$$0 < f(x) < 1\ ,\quad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1-f(t)\}f(t)}\,dt = ax$$

さらに、$f(0)=\dfrac{1}{3}$ であるとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=0$, $x=1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

さらに、$\displaystyle\lim_{a\to+0} S(a)$ を求めよ。

解答

<文系>

１． (1) $\{a_n\} = n(n+2)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

２，(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{3}{8}\vec{a}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$　(3)