2021年	北海道大学　数学入試問題	

＜文系＞

１． 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$（n = 1 , 2 , 3 , ⋯ ）で表される数列$\{a_n\}$がある。

(1) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ を求めよ。

２． 三角形 OAB において、辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，直線 OA に関して点 D と対称な点を E，点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし、$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $9|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|=20|\overrightarrow{\mathrm{OF}}|$ となるとき、$|\vec{b}|$ の値を求めよ。

３． 実数 x に対して、$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+4\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ とおく。

(1) $t=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ とおく。$\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$ と $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ をそれぞれ t の式で表せ。

(2) $0\leqq x\leqq \pi$ のとき、方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

４． k を $k>-1$ を満たす実数とする。直線 l : $y=(1-k)x+k$ および放物線 C : $y=x^2$ を考える。C と l で囲まれた部分の面積を S_1 とし、C と l と直線 $x=2$ の 3 つで囲まれた部分の面積を S_2 とする。

(1) S_1 を k を用いて表せ。

(2) S_2 を k を用いて表せ。

(3) k が $k>-1$ を満たしながら動くとき、S_2-S_1 の最大値を求めよ。

＜理系＞

１．三角形 OAB において、辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D とし、直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし、$|\vec{a}|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$ を満たすとする。

(1) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 三角形 BDE の面積が $\dfrac{5}{9}$ になるとき、$|\vec{b}|$ の値を求めよ。

２．a を $a\neq-3$ を満たす定数とする。放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l_1，点 $\mathrm{B}\left(a+2,\dfrac{(a+2)^2}{2}\right)$ における接線を l_2 とする。l_1 と l_2 の交点を C とおく。

(1) C の座標を a を用いて表せ。

(2) a が $a>0$ を満たしながら動くとき、$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$ が最小となるときの a の値を求めよ。ただし、$|\mathrm{AB}|$および$|\mathrm{BC}|$はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す。

３．正の実数 x , y が、方程式 $\dfrac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2}$ ………（★）を満たすとする。

(1) y^2 を x を用いて表せ。

(2) 正の実数 x , y が（★）および $1-\dfrac{x}{y}>0$ を満たしながら動くとき、$\dfrac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\dfrac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$ の最大値を求めよ。

４．$a_1=2$, $b_1=1$ および $a_{n+1}=2a_n+3b_n$, $b_{n+1}=a_n+2b_n$（ n = 1 , 2 , 3 , … ）で定められた数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$がある。$c_n=a_nb_n$ とおく。

(1) c_2 を求めよ。

(2) c_n は偶数であることを示せ。

(3) n が偶数のとき、c_n は 28 で割り切れることを示せ。

５． 座標平面上で、媒介変数 θ を用いて $x = (1 + \cos\theta)\cos\theta$, $y = \sin\theta$（$0 \leqq \theta \leqq \pi$）と表される曲線 C がある。C 上の点で x 座標の値が最小になる点をとし、A の x 座標の値を a とおく。B を点$(a, 0)$, O を原点$(0, 0)$とする。

(1) a を求めよ。

(2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答

<文系>

１．(1) $\{a_n\} = n\,(\,n + 2\,)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

２，(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{3}{8}\vec{a}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{5}{6}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$　(3)