

No4 2次関数（2次方程式と2次不等式）

74. 次の2次方程式を解け。

- (1) $2x^2 - 3 = 0$ (2) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ (3) $6x^2 - 11x + 4 = 0$
(4) $2x^2 - 3x - 1 = 0$ (5) $3x^2 - 6x + 2 = 0$ (6) $4(x - 2)^2 - 5 = 0$
(7) $x^2 + 6x + 9 = 7$

75. 次の2次方程式を解け。

- (1) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = 0$ (2) $0.3x^2 - 2.4x + 0.9 = 0$
(3) $\sqrt{2}x^2 - 6x + 4\sqrt{2} = 0$ (4) $(2\sqrt{2} - 2)x^2 + x - (\sqrt{2} + 1) = 0$
(5) $2(x + 1)^2 = 3(x + 1)$ (6) $4(x^2 + x - 1)^2 = 1$
(7) $(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5) = 4$ (8) $x^2 - 3|x| - 4 = 0$
(9) $x^2 - 4x = \sqrt{(x - 2)^2} + 8$

76. a, b, c を定数とするとき、次の方程式を解け。

ただし、(2)では $a \geq 1, a = -1$, (3)では $b^2 - 4ac \geq 0$ とする。

- (1) $ax^2 + (a^2 - 1)x - a = 0$ (2) $(a^2 - 1)x^2 = a + 1$ (3) $ax^2 + bx + c = 0$

77. (1) 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ。 a は定数とする。

(ア) $x^2 - 5x - 2 = 0$ (イ) $3x^2 + 2x + 4 = 0$

(ウ) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - 2\sqrt{6}x + 4\sqrt{3} = 0$ (エ) $2x^2 - x + 5a - 1 = 0$

(2) 2次方程式 $x^2 - 3kx + 2k = 0$ が重解をもつとき、定数 k の値を定めよ。

(3) x の方程式 $(a - 2)x^2 - 2ax + a - 3 = 0$ の実数解の個数を求めよ。 a は定数とする。

(4) 2つの2次方程式 $3x^2 - 4x + k - 2 = 0$ と $x^2 + (2k + 3)x + k^2 + 1 = 0$ がともに実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

78. (1) 2次方程式 $4x^2 - 8x - a = 0$ の1つの解が $1 + \sqrt{2}$ であるとき、定数 a の値と他の解を求めよ。

(2) 2次方程式 $2x^2 + ax - 3b = 0$ の2つの解が3と -2 であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

79. 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x^2 + 2x - y^2 - 2y = 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x^2 + 4x + y^2 - y = 2 \\ 3x^2 - x + y^2 - 2y = 1 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 6x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ x^2 - 6x + 2y^2 - 4y = 1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3x^2 - xy + y^2 = 1 \\ 2x^2 - xy + 5y^2 = 4 \end{cases}$$

80. (1) 2次方程式 $x^2 + 2kx + 2 = 0$ と $x^2 + 4x + k = 0$ がただ1つの共通解をもつとき、 k の値と共通解を求めよ。

(2) 2次方程式 $x^2 - (k + 2)x + 2k = 0$ と $x^2 - (k - 1)x - 4 = 0$ が共通解をもつとき、 k の値と共通解を求めよ。

(3) 2次方程式 $x^2 - (3m - 1)x + m^2 - m = 0$ と $x^2 - (2m - 5)x + m^2 - 5m + 6 = 0$ がただ1つの共通解をもつとき、 m の値と共通解を求めよ。 (国土館大)

81. 2次関数 $y = (k^2 - 1)x^2 + 4(k - 2)x + 4$ のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

82. 2次関数 $y = -2x^2 - 2(k - 2)x - 2k + 4$ のグラフが x 軸と接するように定数 k の値を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

83. 2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが下図のようになるとき、次の値の符号を調べよ。

(1) a

(2) b

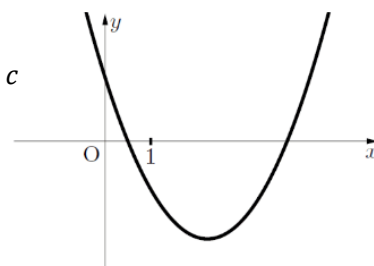
(3) c

(4) $b^2 - 4ac$

(5) $a + b + c$

(6) $a - b + c$

(7) $2a + b$



84. (1) 2次関数 $y = 2x^2 - 3x - 4$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

(2) 2次関数 $y = -x^2 - kx - 2k$ が x 軸から切り取る線分の長さが3であるとき、定数 k の値を求めよ。

85. 次の放物線と直線を同一平面上に図示せよ。

(1) $y = x^2 - 4x + 5, y = -2x + 8$

(2) $y = -x^2 - 2x + 1, y = 2x + 5$

(3) $y = x^2 + 2x, y = x - 1$

86. (1) k を定数とするとき、2次関数 $y = kx^2$ と直線 $y = 4x - 2$ の共有点の個数を求めよ。

(2) 点 $(1, -3)$ から放物線 $y = x^2$ に引いた接線の方程式と接点を求めよ。

87. 次の条件を満たす2次関数を求めよ。

- (1) 頂点が $(3, -2)$ で、点 $(4, 1)$ を通る。
- (2) 軸が $x = 1$ で、2点 $(-2, 5)$, $(2, -3)$ を通る。
- (3) 3点 $(-1, -1)$, $(1, -3)$, $(2, 2)$ を通る。
- (4) 3点 $(-2, 0)$, $(-1, -6)$, $(1, 0)$ を通る。
- (5) 3点 $(-1, 1)$, $(2, 4)$, $(5, 1)$ を通る。
- (6) $x = -1$ で最大値4をとり、点 $(2, 1)$ を通る。
- (7) 最小値が -8 で、2点 $(2, 0)$, $(6, 0)$ を通る。
- (8) x 軸とただ1つの共有点を持ち、2点 $(-2, 8)$, $(4, 2)$ を通る。
- (9) $y = -x^2$ を平行移動したもので、点 $(-3, 2)$ を通り、頂点が $y = -2x - 1$ 上にある。
- (10) 頂点が $(1, 2)$ で、 x 軸から切り取る線分の長さが4である。
- (11) 2点 $(2, -2)$, $(6, 4)$ を通り、 x 軸から切り取る線分の長さが6である。

88. 次の2次不等式を解け。

- (1) $6x^2 - 7x + 2 > 0$
- (2) $x^2 \leq 4$
- (3) $-x^2 - x + 1 > 0$
- (4) $(x - 1)(3 - x) \leq 0$
- (5) $x^2 + 4x + 4 > 0$
- (6) $4x^2 - 20x + 25 \geq 0$
- (7) $x^2 + x + \frac{1}{4} < 0$
- (8) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
- (9) $x^2 - 2x + 2 \geq 0$
- (10) $-2x^2 + 4x - 3 \geq 0$

89. 次の不等式を解け。

- (1) $|x^2 - 2x| \geq 1$
- (2) $x^2 - 5|x| + 4 > 0$
- (3) $|x^2 - x - 2| > x$
- (4) $-x^2 + 2x + 7 > |x| + |x - 3|$

90. a を定数とする。次の不等式を解け。

- (1) $x^2 - (a + 1)x + a \leq 0$
- (2) $ax^2 - ax - 2a > 0$
- (3) $ax^2 - (a^3 + 2a^2)x + 2a^4 \geq 0$

91. (1) 連立不等式 $\begin{cases} x^2 - 7x + 10 > 0 \\ x^2 - (a + 1)x + a \leq 0 \end{cases}$ をみたす整数 x が5個存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) $3x^2 - 16x + a < 0$ を満たす整数 x が4個存在する定数 a の値の範囲を求めよ。

92. (1) 2次不等式 $ax^2 - bx - 8 \geq 0$ の解が $x \leq -1, 4 \leq x$ であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

(2) 2次不等式 $ax^2 + 14x + b > 0$ の解が $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ であるとき、定数 a, b の値を求めよ。

93. (1) a, b, c は定数とする。 x の不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ の解が $-2 < x < 3$ であるとき、不等式 $cx^2 - bx + a < 0$ と $ax^2 + cx + b > 0$ の解を求めよ。 (東海大)
- (2) x の不等式 $(a^2 - 1)x^2 + (2a + 1)x - 4 > 0$ の解が $2 < x < k$ となるとき、定数 a, k の値を求めよ。 (久留米大)
94. (1) すべての実数 x に対して、2次不等式 $x^2 - kx + k + 1 > 0$ が成り立つとき、定数 k の値の範囲を求めよ。
- (2) すべての実数 x に対して、不等式 $kx^2 + 4x + k - 3 \leq 0$ が成り立つとき、定数 k の値の範囲を求めよ。
95. すべての実数 x, y に対して $x^2 - 2(a - 1)xy + y^2 + (a - 2)y + 1 \geq 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。 (阪南大)
96. 次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ。
- (1) $0 \leq x \leq 2$ のすべての x の値に対して、 $x^2 - 2ax + a - 3 < 0$ が成立する。
- (2) $0 \leq x \leq 2$ のすべての x の値に対して、 $x^2 - 2ax + 5a - 4 > 0$ が成立する。
97. 方程式 $x^2 - ax + a^2 - 3a = 0$ が次の条件を満たすとき、定数 a の値の範囲を求めよ。
- (1) 正の実数解と負の実数解をもつ。
- (2) 異なる2つの正の実数解をもつ。
- (3) 2より大きい実数解と2より小さい実数解をもつ。
- (4) 2より小さい異なる2つの実数解をもつ。
- (5) 絶対値が1より小さい異なる2つの実数解をもつ。
98. 放物線 $y = x^2 + ax + 2$ が、2点 $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ を結ぶ線分(端点を含む)と異なる2点で交わるときの a の値の範囲を求めよ。 (群馬大)
99. 不等式 $x^2 + 2ax + 1 \leq 0 \dots\dots①$, $2x^2 + 7x - 4 \leq 0 \dots\dots②$ について、不等式①の解が常に存在するとする。このとき、不等式①を満たす x がすべて不等式②を満たすような a の値の範囲を求めよ。 (東洋大)
100. 2次方程式 $ax^2 - (a - 1)x - a + 1 = 0$ が、 $-1 < x < 1$ と $3 < x < 4$ にそれぞれ1つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

101. 2次方程式 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ が次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ。

- (1) 異なる2つの実数解のうち、ただ1つが $-2 < x < 2$ にある。
- (2) 異なる2つの実数解のうち、ただ1つが $-2 \leq x \leq 2$ にある。
- (3) $-2 < x < 2$ に少なくとも2つの実数解をもつ。
- (4) $-2 \leq x \leq 2$ に少なくとも2つの実数解をもつ。

102. a を定数とする。方程式 $|x^2 - 5x + 4| - x + a = 0$ の実数解の個数を求めよ。

103. a を定数とする。方程式 $|x^2 - 4x| - 4ax - 2a = 0$ の実数解の個数を求めよ

104. 実数 x, y が $x^2 - xy + y^2 = 3$ を満たすとする。

- (1) x の最大値と最小値を求めよ。
- (2) $2x + y$ の最大値と最小値を求めよ。
- (3) $\frac{x}{y+3}$ の最大値と最小値を求めよ。

105. (1) 関数 $y = \frac{x^2+2}{x^2-2x+3}$ の値域を求めよ。

(2) 関数 $y = \frac{x^2+2}{x^2-2x+3}$ ($x \geq 0$)の値域を求めよ。

(東北大・改)