No5 集合・命題・条件・論理・証明

106. (1) 次の集合の間に成り立つ関係を⊂, ⊃, =を用いて表せ。

① $A=\left\{n \middle| n\text{は 1 桁の素数}\right\}$, $B=\left\{2n+1 \middle| n\text{は整数}, 1\leqq n\leqq 3\right\}$

② $A=\{x|x^2-5x+6=0\}$, $B=\left\{n \middle| n\text{は 6 の正の約数}\right\}$

③ $A=\{3n+1|n=0, 1, 2\}$, $B=\left\{n \middle| n\text{は 3 で割ると 1 余る 1 桁の自然数}\right\}$

(2) 集合$A=\{1, 2, 3, 4\}$の部分集合をすべてあげよ。

107. (1) 10 以下の自然数の集合を全体集合とし、部分集合 A, B を$A=\{1, 3, 4, 6, 7\}$,
$B=\{2, 3, 5, 6, 9\}$とするとき、次の集合を求めよ。

① $\overline{A}$　② $A\cap B$　③ $A\cup B$　④ $\overline{A}\cap B$　⑤ $A\cup\overline{B}$

⑥ $\overline{A\cap B}$　⑦ $\overline{A\cup B}$　⑧ $\overline{A}\cup\overline{B}$　⑨ $\overline{A}\cap\overline{B}$　⑩ $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$

(1) 10 以下の自然数の全体集合を U とし、部分集合を A, B について、
(2) $A\cap B=\{3, 8\}, \overline{A}\cap B=\{7, 9\}, \overline{A}\cap\overline{B}=\{1, 6, 10\}$とするとき、次の集合を求めよ。

① A　② B　③ $A\cup B$

108. 12 以下の自然数の集合を全体集合とし、部分集合 A, B, C を$A=\{1.3.5.6.11\}$,
$B=\{6, 7, 8, 11, 12\}, C=\{2, 3, 6, 8, 10\}$とするとき、次の集合を求めよ。

(1) $A\cap B\cap C$　(2) $A\cup B\cup C$　(3) $(A\cap B)\cup C$　(4) $A\cap(B\cup C)$

(5) $A\cap\overline{B}\cap C$　(6) $\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$　(7) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$　(8) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

(9) $\overline{A}\cup B\cup C$　(10) $A\cup\overline{B}\cup\overline{C}$　(11) $(\overline{A}\cup B)\cap\overline{C}$　(12) $A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$

(13) $(A\cup C)\cap(B\cup C)$　(14) $(A\cup\overline{B})\cap(\overline{C\cap B})$

109. 実数全体の集合を全体集合とし、部分集合 A, B を$A=\{x|1<x<5\}$,
$B=\{x|x\leqq 2, 6\leqq x\}$とするとき、次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$　(2) $\overline{B}$　(3) $A\cap B$　(4) $A\cup B$

(5) $\overline{A}\cap B$　(6) $A\cup\overline{B}$　(7) $\overline{A}\cap\overline{B}$　(8) $\overline{A}\cup\overline{B}$

110. 実数全体の集合を全体集合とする。次の部分集合 A , B について$A \subset B$となるようなkの値の範囲を求めよ。

(1) $A = \{x|2 \leqq x \leqq 5\}$, $B = \{x|k-3 \leqq x < k+1\}$

(2) $A = \{x|2 < x < 5\}$, $B = \{x|k-3 \leqq x < k+1\}$

111. 次の集合 A , B において、$A \subset B$かつ$A \neq B$であることを示せ。

(1) $A = \left\{4n+1 \middle| n\text{は整数}\right\}$, $B = \left\{2n+1 \middle| n\text{は整数}\right\}$

(2) $A = \left\{8n+3 \middle| n\text{は整数}\right\}$, $B = \left\{4n-1 \middle| n\text{は整数}\right\}$

112. 次の集合 A , B において、$A = B$であることを示せ。

(1) $A = \left\{4n+3 \middle| n\text{は整数}\right\}$, $B = \left\{4n-1 \middle| n\text{は整数}\right\}$

(2) $A = \left\{2x+5y \middle| x , y\text{は整数}\right\}$, $B = \left\{3x-4y \middle| x , y\text{は整数}\right\}$

113. 実数 a , b , c についての命題「$ac = bc$ならば$a = b$」は真か偽か。

114. 以下の命題はすべて偽の命題である。反例を述べよ。

(1) 自然数 n が 4 の倍数かつ 6 の倍数ならば、n は 24 の倍数である。

(2) 実数 a について、$a^2 > 1$ならば$a > 1$である。

(3) 実数 a について、$\sqrt{a^2} = a$である。

(4) 実数 a , b について、$a > b$ならば$a^2 > b^2$である。

(5) 実数 a , b について、$a^2 = b^2$ならば$a = b$である。

(6) 整数 m , n について、$m+n$が偶数ならば m と n は偶数である。

(7) 整数 m , n について、$m+n$が偶数ならば mn も偶数である。

(8) $x+y$, xyがともに有理数ならば、x , y がともに有理数である。

(9) $x+y$, xyがともに整数ならば、x , y がともに整数である。

(10) 2 組の辺の長さと 1 組の角の大きさがそれぞれ等しい 2 つの三角形は合同である。

(11) 四角形において、対角線が直交するならば、ひし形である。

(12) 四角形において、対角線の長さが等しいならば、長方形である。

(13) 四角形 ABCD において、AB＝BC＝CD＝DA かつ AB∥CD かつ BC∥DA ならば、四角形 ABCD は正方形である。

115. 以下の命題はすべて偽の命題である。反例を述べよ。$[x]$は、xを超えない最大の整数を表す。

(1) 実数 x , y について、$[x] + [y] = [x + y]$である。

(2) 実数 x , y について、$x < y$ならば、$[x] < [y]$である。

(3) 有理数の有理数乗は有理数である。（数Ⅱ）

(4) 無理数の有理数乗は無理数である。

(5) 有理数の無理数乗は無理数である。（数Ⅱ）

(6) 無理数の無理数乗は無理数である。（数Ⅱ）

(7) 実数 x , y について、$x + y > 2$かつ$xy > 1$ならば、$x > 1$かつ$y > 1$である。

(8) 実数 x , y について、$|x| < 1$かつ$|y| < 1$ならば、$x^2 + y^2 < 1$である。

(9) 実数 x , y について、$x^2 + y^2 \leqq 2$ならば、$|x| \leqq 1$かつ$|y| \leqq 1$である。

(10) 実数 x , y について、$x^2 + y^2 \leqq 1$ならば、$|x| + |y| \leqq 1$である。

116. 次の命題の真偽を述べよ。偽のときは反例をあげよ。

(1) 実数 x に対して、$|x| \leqq 1$ならば$|x - 3| > 1$。

(2) 実数 x に対して、$|x| \leqq 1$ならば$|x - 2| > 1$。

(3) 20 以下の自然数 n に対して、「n が 2 の倍数かつ 3 の倍数でない」ならば n が 6 の倍数でない。

117. 次の条件の否定を述べよ。偽のときは反例をあげよ。

(1) 実数 x , y について、$x + y > 2$かつ$xy > 1$ならば、$x > 1$かつ$y > 1$である。

(2) 実数 x , y について、$|x| < 1$かつ$|y| < 1$ならば、$x^2 + y^2 < 1$である。

(3) 実数 x , y について、$x^2 + y^2 \leqq 2$ならば、$|x| \leqq 1$かつ$|y| \leqq 1$である。

(4) 実数 x , y について、$|x| + |y| \leqq 1$ならば$|x + y| \leqq 1$である。

(5) 実数 x , y について、$x^2 + y^2 \leqq 1$ならば、$|x| + |y| \leqq 1$である。

(6) 整数 m , n について、$m^2 + n^2 \leqq 1$ならば、$|m| + |n| \leqq 1$である。

118. 次の条件の否定を述べよ。x , y , z は実数 ，m は整数とする。

(1) $1 < x \leqq 3$　　(2) $x = 1$または$y \neq 2$　　(3) m は偶数かつ 3 の倍数

(4) $x = y = z = 0$　　(5) x , y , z のうち、少なくとも 1 つは有理数

119. 次の命題の否定を述べ、元の命題とその否定の真偽を調べよ。

(1) すべての素数は奇数である。

(2) $x^2 + 1 < 0$である実数 x が存在する。

(3) 任意の実数 x , y につて、$x^2 + y^2 > 0$。

(4) 適当な自然数 a , b について、$a^2 + b^2 = 13^2$。

120. x , y を実数とする。条件 p , q が同値であることを示せ。

(1) p ：「$x > 1$かつ$y > 1$」　q ：「$x + y > 2$かつ$(x - 1)(y - 1) > 0$」

(2) p ：「$xy + 1 = x + y$」　q ：「x , y の少なくとも一方が 1」

(3) p ：「$x^2 + y^2 = 2(x + y - 1)$」　q ：「$x = y = 1$」

(4) p ：「$x = y = 0$」　q ：「$x^2 - xy + y^2 = 0$」

(5) p ：「$x > y$」　q ：「$x^3 > y^3$」

(6) p ：「$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 0$」　q ：「$x = y = z = 0$」

(7) p ：「$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$」　q ：「$x = y = z$」

(8) p ：「$x \geqq 0$」　q ：「$\sqrt{x^2 = x}$」

(9) p ：「$|x + y| = |x - y|$」　q ：「$xy = 0$」

(10) p ：「$|x + y| = |x| + |y|$」　q ：「$xy \geqq 0$」

(11) p ：「$|x + y| < |x| + |y|$」　q ：「$xy < 0$」

(12) p ：「$xy < 0$」　q ：「$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} < 0$」

121. a , b , c を実数とする。$ac = bc$は、$a = b$であるための[　　]条件である。

122. x , y を実数とする。次の命題の逆・裏・待遇を述べ、真偽を調べよ。

$x = 1$かつ$y = 2$　ならば　$x + y = 3$

123. (1) 整数 m , n について、$m^2 + n^2$が奇数ならば、m が偶数または n が偶数であることを示せ。

(2) 整数 n について、n^2が 3 の倍数ならば、n が 3 の倍数であることを示せ。

(3) 正の実数 x が無理数ならば、$\sqrt{x}$も無理数であることを示せ。

(4) 実数 x , y について、x , y がともに無理数ならば、$x + y$と$x - y$の少なくとも一方が無理数であることを示せ。