No6 三角比と図形の計量

124. ある場所から測った丘の頂点の仰角が$30°$，丘の頂点に立つ高さ 20m の木の頂点の仰角が$60°$であった。丘の高さを求めよ。

125. (1) $0° < \theta < 90°$とする。$\sin\theta = \frac{3}{5}$のとき、$\cos\theta$,$\tan\theta$を求めよ。

(2) $0° \leqq \theta \leqq 180°$とする。$\sin\theta = \frac{15}{17}$のとき、$\cos\theta$,$\tan\theta$を求めよ。

(3) $0° \leqq \theta \leqq 180°$とする。$\tan\theta = -2$ のとき、$\sin\theta$,$\cos\theta$を求めよ。

126. 次の式を簡単にせよ。

(1) $(3\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - 3\cos\theta)^2$

(2) $\frac{1}{\tan^2\theta + 1} - (1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$

127. $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ $(0° < \theta < 180°)$のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$　　(2) $\sin^3\theta - \cos^3\theta$

(3) $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$　　(4) $\tan\theta - \frac{1}{\tan\theta}$

128. (1) $\cos 140° - \sin 40° - \cos 130° + \sin 50°$の値を求めよ。

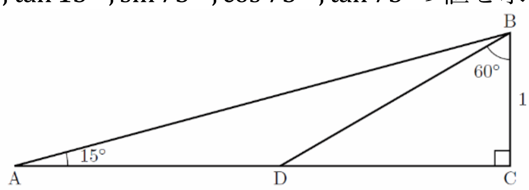
(2) $\sin 10° \cos 100° + \sin 80° \cos 170°$の値を求めよ。

(3) $\tan 160° \tan 110°$の値を求めよ。

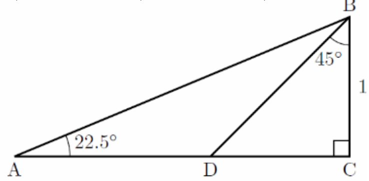
129. △ABC において、次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$　　(2) $\tan\frac{A+B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1$

130. 次の直角三角形を利用して$\sin 15°$,$\cos 15°$,$\tan 15°$,$\sin 75°$,$\cos 75°$,$\tan 75°$の値を求めよ。



131. 次の直角三角形を利用して$\sin 22.5°$,$\cos 22.5°$,$\tan 22.5°$,$\sin 67.5°$,$\cos 67.5°$,$\tan 67.5°$の値を求めよ。

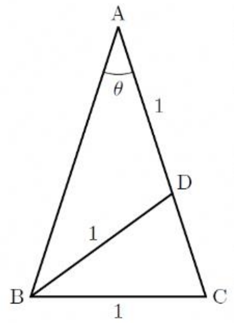


132. AB = AC の右図の二等辺三角形において、AD = BD = BC = 1 であるとする。

(1) θ の値を求めよ。

(2) AB の長さを求めよ。

(3) $\sin 18°$と$\cos 36°$の値を求めよ。



133. $0° \leqq \theta \leqq 180°$とする。次の式を満たす$\theta$の値を求めよ。

(1) $\sin\theta = 0$　(2) $\sin\theta = 1$　(3) $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$　(4) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\cos\theta = 0$　(6) $\cos\theta = -1$　(7) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$　(8) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

(9) $\tan\theta = 0$　(10) $\tan\theta = \sqrt{3}$　(11) $\tan\theta = -1$　(12) $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

134. $0° \leqq \theta \leqq 180°$とする。次の不等式を満たす$\theta$の値の範囲を求めよ。

(1) $2\sin\theta - 1 < 0$　(2) $-1 < 2\cos\theta \leqq \sqrt{3}$　(3) $\sqrt{3}\tan\theta + 1 > 0$

135. $0° \leqq \theta \leqq 180°$とする。次の方程式を満たす$\theta$の値を求めよ。

(1) $2cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$　(2) $2sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$

(3) $\sqrt{2}\sin\theta + \tan\theta = 0$

136. 次の不等式を満たすθの値の範囲を求めよ。

(1) $2cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 \leqq 0$　$(0° \leqq \theta \leqq 180°)$

(2) $2\cos\theta < 3\tan\theta$　$(90° < \theta \leqq 180°)$

(3) $4\sqrt{3}sin^2\theta + (6 - 2\sqrt{3})\cos\theta + 3 - 4\sqrt{3} > 0$　$(0° \leqq \theta \leqq 180°)$　（同支社女子大）

137. 2 直線$y = x + 2$と$y = -\sqrt{3}x + 1$のなす角θ_0を求めよ。

138. $0° \leqq \theta \leqq 180°$とする。$2\sin\theta + 2\cos\theta = 1$のとき、$\sin\theta$,$\cos\theta$,$\tan\theta$の値を求めよ。

139. 次の関数の最大値・最小値とそのときのθの値を求めよ。

(1) $y = 2cos^2\theta + 2\sin\theta - 1$　$(0° \leqq \theta \leqq 180°)$

(2) $y = \frac{1}{\cos^2\theta} - 2\tan\theta + 2$　$(0° < \theta < 90°)$

140. $0° \leqq \theta \leqq 180°$とする。$x$ の 2 次方程式$x^2 - 2(\sin\theta)x + (cos^2\theta - \cos\theta) = 0$について、次の問いに答えよ。

(1) 正の解と負の解をもつように θ の値の範囲を定めよ。

(2) 異なる 2 つの正の解をもつように θ の値の範囲を定めよ。

141. △ABC において外接円の半径を R とするとき、次の値を求めよ。

(1) $A = 45°, B = 75°, a = 3$のとき、c, R

(2) $a = 2\sqrt{6}, b = 4, A = 120°$のとき、$B, C$

(3) $a = 4\sqrt{3}, R = 4$のとき、A

142. △ABC において次の値を求めよ。

(1) $b = 4, c = 3, A = 120°$のとき　a

(2) $a = 1 + \sqrt{3}, b = \sqrt{6}, c = 2$のとき　B

(3) $b = 2\sqrt{2}, c = 4, B = 30°$のとき　a

143. 次の△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1) $a = 2, B = 30°, C = 105°$

(2) $b = 2, c = 1 + \sqrt{3}, A = 60°$

(3) $a = \sqrt{3} - 1, b = \sqrt{2}, c = 2$

(4) $b = \sqrt{6}, c = 2, C = 45°$

144. (1) △ABC が$\frac{\sin A}{7} = \frac{\sin B}{8} = \frac{\sin C}{13}$を満たすとき、最大角の大きさを求めよ。

(2) △ABC が$(a + b) : (b + c) : (c + a) = 4 : 5 : 6$を満たすとき、$C$ を求めよ。

(3) △ABC が$A : B : C = 3 : 4 : 5$を満たすとき、$a : b$を求めよ。

145. 3 辺の長さが$a = 4, b = 3, c = 2$であるような三角形は存在するか。存在するとすれば、鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形のどれであるか。

146. 3 辺の長さが$2, 4, x$である△ABC がある。

(1) x の取りうる値の範囲を求めよ。

(2) △ABC が鈍角三角形になるような x の範囲を求めよ。

147. 3 辺の長さが$x^2 - x + 1, -2x + 1, x^2 - 1$の△ABC がある。

(1) x の取りうる値の範囲を求めよ。

(2) △ABC の最大角の大きさを求めよ。

148. 次の等式を満たす△ABC の形状を答えよ。

(1) $2\cos A\sin B = \sin C$　　(2) $a\cos A = b\cos B$

149. (1) $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$である△ABC の面積 S を求よ。

(2) $a = 6$, $b = 5$, $c = 5$である△ABC の面積 S を求めよ。

(3) $a = 5$, $b = 5$, $c = 5$である△ABC の面積 S を求めよ。

(4) $a = 12$, $b = 5$, $c = 13$である△ABC の面積 S を求めよ。

150. (1) $a = 3+\sqrt{2}$, $b = 3-\sqrt{2}$, $c = 4$である△ABC の面積 S を求めよ。

(2) $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{7}$である△ABC の面積 S を求めよ。

151. (1) 半径 1 の円に内接する正十二角形の周の長さ L と面積 S を求めよ。

(2) 1 辺の長さが 1 の正十二角形の面積 S を求めよ。

152. △ABC において、$a = 5$, $b = 6$, $c = 7$とする。このとき、外接円の半径 R と内接円の半径 r を求めよ。

153. (1) △ABC において、AB = 6 , AC = 5 , ∠A = 60°とし、∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。

(2) △ABC において、AB = 4 , AC = 5 , BC = 6 とし、∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。

154. (1) △ABC において、辺 BC の中点を M とする。

このとき、$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ (中線定理) が成り立つことを示せ。

(1) △ABC において、$a = 6$, $b = 5$, $c = 4$, 辺 BC の中点を M とする。このとき、線分 AM の長さを求めよ。

155. △ABC において、辺 BC を m：n にネイ分する点を D とする。このとき、
$n\mathrm{AB}^2+m\mathrm{AC}^2 = n\mathrm{BD}^2+m\mathrm{CD}^2+(m+n)\mathrm{AD}^2$ が成り立つことを示せ。

155. 四角形 ABCD において、対角線の長さを p, q, 対角線のなす角を θ とする。

(1) 四角形 ABCD の面積を S とするとき、$S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$ となることを示せ。

(2) 対角線の長さの和が 1 となる四角形のうち、面積が最大になるのはどのような四角形か。また、面積の最大値を求めよ。

156. 四角形 ABCD は円に内接しており、AB = 4 , BC = 5 , CD = 7 , DA = 10 である。次の値を求めよ。

(1) 対角線 BD の長さ　　　　　　(2) 四角形 ABCD の面積 S

157. 四角形 ABCD は円に内接しており、AB = a , BC = b , CD = c , DA = d である。

(1) $s=\frac{a+b+c+d}{2}$ とおくとき、面積 $S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ となることを示せ。

(2) $a=4, b=5, c=7, d=10$ のとき、面積 S を求めよ。

158. 四角形 ABCD は円に内接しており、AB = a , BC = b , CD = c , DA = d , AC = x , BD = y とする。このとき、トレミーの定理 $xy=ac+bd$ が成り立つことを示せ。

159. 円に内接する四角形 ABCD が AB = 3 , BC = 5 , CD = 7 , DA = 7 , ∠ABC =120°であるとき、BD の長さを求めよ。

160. 半径 1 の円 O がある。円 O の中心から距離が 3 の点 P から円に引いた 2 本の接線と円 O の接点を A , B とするとき、線分 AB の長さを求めよ。

161. 一辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求めよ。

162. 四角形 ABCD は円に内接しており、△ABC は正三角形であるとする。AD = BD + CD となることを示せ。

163. 1 辺の長さが a , 対角線の長さが b , c の正七角形で $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ が成り立つことを示せ。

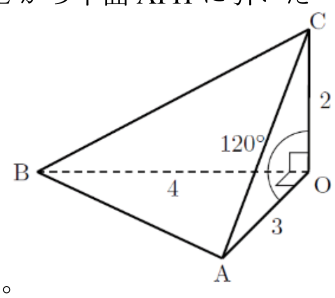
164. 四角形 ABCD は円に内接しており、線分 BD は直径である。
$\angle \mathrm{ABD}=\alpha, \angle \mathrm{CBD}=\beta$ のとき、$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$を示せ。

165. 円に内接する四角形 ABCD は、AB = 4 , BC = 5 , CD = 7 , DA = 10 を満たす。また、線分 AC と線分 BD の交点を E とする。次の値を求めよ。

(1) 対角線 BD の長さ　　(2) 対角線 AC の長さ
(3) 外接円の半径　　(4) 四角形 ABCD の面積 S
(5) AE：CE と AE の長さ　　(6) sin∠AED

166. $\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{AD}=4\sqrt{2}$, $\mathrm{AE}=2\sqrt{2}$なる直方体 ABCD−EFGH がある。この直方体を 3 点 A , F , H を通る平面で切るとき、断面積を求めよ。また、頂点 E から平面 AFH に引いた垂線の長さを求めよ。

167. 右図のような四面体 OABC の体積 V を求めよ。



168. 1 辺の長さが a の正四面体 ABCD について、次の値を求めよ。

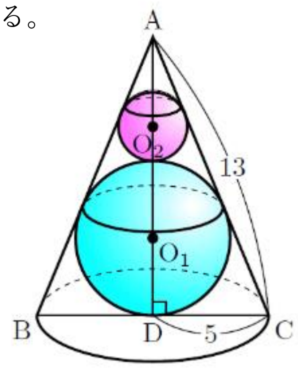
(1) 表面積 S　　(2) 2 面のなす角の余弦　　(3) 高さ h
(4) 体積 V　　(5) 内接球の半径 r　　(6) 外接球の半径 R

169. OA = OB = OC = 6 , AB = 5 , BC =7 , CA = 8 である四面体 OABC の体積 V を求めよ。

170. $\mathrm{OA}=2\sqrt{5}$, $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\sqrt{5}$, $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\sqrt{35}$, $\mathrm{BC}=2\sqrt{3}$である四面体 OABC の体積 V を求めよ。

171. 図のように、底面の円の半径 5 , 母線の長さ 13 の直円錐に大球と小球が内接している。大球は底面とも接しており、大球と小球は互いに外接している。

(1) 直線水の表面積と体積を求めよ。
(2) 大球の半径 r_1 と表面積 S と体積 V を求めよ。
(3) 直線水の側面と大球が接する部分(円)の半径r'を求めよ。
(4) 直円錐から(3)の円を含む平面より上の部分を取り除いた円錐台の体積を求めよ。
(5) 小球の半径 r_2 を求めよ。
(6) 直円錐の外接球の半径 R を求めよ。



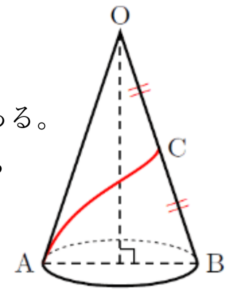
172. 1 辺の長さが a の正八面体について、次の値を求めよ。

(1) 表面積 S　　(2) 体積 V　　(3) 外接球の半径 R

(4) 2 面のなす角の余弦　　(5) 内接球の半径 r

173. 1 辺の長さ 4 の正四面体 ABCD があり、辺 AD 上に AE＝2 となるように点 E をとる。また、辺 BC 上に点 P，辺 BD 上に点 Q をとる。3 つの線分の長さの和 AP＋PQ＋QE の最小値を求めよ。

174. 右図のように、底面が半径 1 の円，母線 OA の長さが 3 の直円錐がある。また、母線 OB の中点を C とする。直円錐の側面上を通って点 A から点 C に至るときの最短距離を求めよ。



175. 四面体 ABCD は、4 つの面のどれも 3 辺の長さが 7 , 8 , 9 の三角形である。この四面体 ABCD の体積は[　　]である。　（早稲田大）

176. △ABC は鋭角三角形とする。このとき、各面すべてが△ABC と合同な四面体が存在することを示せ。　（京都大）