No1 式と証明

1. 整式$A=2x^3-5-7x^2$を整式$B=3-2x+x^2$で割ったときの商と余りを求めよ。また、その結果を$A=BQ+R$の形で表せ。

2. xについての整式とみてAをBで割ったときの商と余りを求めよ。

(1) $A=2x^2-4x+3\,,B=2x-1$　　(2) $A=x^3+y^2-2xy\,,B=x^2+xy+1$

3. 次の条件を満たす整式$A\,,B$を求めよ。

(1) Aを$2x^2-3x+1$で割ると、商が$3x-1$, 余りが$5x+2$となる。

(2) x^3-4x^2+6x+2をBで割ると、商が$x-1$, 余りが$2x+3$となる。

4. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{3a^3b}{4xy}\div\frac{9a^2b^3}{2x^2y}$　　(2) $\frac{x^2-3x+2}{2x^2-2}\times\frac{x^2-3x-4}{x^3-8}$

(3) $\frac{x^2+3xy+2y^2}{x^3-xy^2}\div\frac{x+2y}{(x-y)^2}\times\frac{x^2}{x^3-y^3}$

5. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{x+7}{x^2+2x-3}-\frac{1}{x^2+5x+6}$

(2) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x^2+1}-\frac{1}{x^4+1}$

(3) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

6. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+4}{x+3}+\frac{x+5}{x+4}$

(2) $\frac{x^2-2x-5}{x+1}-\frac{x^2-5x+7}{x-2}$

7. 次の計算をせよ。

(1) $\frac{1}{(2x+1)(2x+3)}+\frac{1}{(2x+3)(2x+5)}+\frac{1}{(2x+5)(2x+7)}$

(2) $\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{(a+b)(a+b+c)}+\frac{d}{(a+b+c)(a+b+c+d)}+\frac{1}{a+b+c+d}$

8. 次の式を簡単にせよ。

(1) $\frac{\frac{2}{x}}{\frac{5}{x+1}}$　　(2) $\frac{x+2-\frac{4}{x-1}}{x-2-\frac{20}{x-1}}$　　(3) $\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$

9. (1) $(2x-3y)^5$を展開せよ。また、各項の係数の和を求めよ。

(2) $(3x-2y)^{10}$のx^3y^7の項の係数を求めよ。

(3) $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$の定数項を求めよ。

(4) $(x-2)^4(3x+1)^3$のx^5の項の係数を求めよ。

10. (1) $(x-2y+3z)^8$の$x^4y^2z^2$の項の係数を求めよ。

(2) $\left(x^2-2x+\frac{1}{x}\right)^5$の$x^3$の係数を求めよ。

11. (1) $(x+2)^8$の展開式のx^kの係数をa_kとするとき、a_kの最大値とそのときの k の値を求めよ。

(2) $(x-2)^{10}$の展開式のx^kの係数をa_kとするとき、a_kの最大値・最小値とそのときの k の値を求めよ。

12. 自然数 n に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots\cdots+(-1)^n\,{}_nC_n=0$

(3) $\begin{cases} nC_0+nC_2+\cdots\cdots+nC_{n-1}=nC_1+nC_3+\cdots\cdots+nC_n=2^{n-1} & (n\text{が奇数}) \\ nC_0+nC_2+\cdots\cdots+nC_n=nC_1+nC_3+\cdots\cdots+nC_{n-1}=2^{n-1} & (n\text{が偶数}) \end{cases}$

13. 自然数 r , n に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $r{}_n\mathrm{C}_r = n{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$　$(1 \leqq r \leqq n)$

(2) ${}_n\mathrm{C}_1 + 2 \cdot {}_n\mathrm{C}_2 + 3 \cdot {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots\cdots + n \cdot {}_n\mathrm{C}_n = n \cdot 2^{n-1}$

(3) ${}_n\mathrm{C}_0 + \frac{{}_n\mathrm{C}_1}{2} + \frac{{}_n\mathrm{C}_2}{3} + \cdots\cdots + \frac{{}_n\mathrm{C}_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

14. $(1+x)^n(x+1)^n = (1+x)^{2n}$を利用し、次の等式が成り立つことを示せ。

$${}_n\mathrm{C}_0{}^2 + {}_n\mathrm{C}_1{}^2 + {}_n\mathrm{C}_2{}^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n{}^2 = {}_{2n}\mathrm{C}_n$$

15. $1 \leqq r \leqq n$ のとき、${}_{n+1}\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r-1}$ が成り立つことを示せ。

16. $0 \leqq r \leqq n-1$ のとき、${}_r\mathrm{C}_r + {}_{r+1}\mathrm{C}_r + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}$ が成り立つことを示せ。

17. (1) 19^{26} を 400 で割ったときの余りを求めよ。

(2) 99^{100} の下位 5 桁を求めよ。

18. 次の等式が x についての恒等式となるように定数 a , b , c の値を定めよ。

$$x^3 - x^2 - 5x + 12 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$$

19. x , y , z が$x + y - 2z = -1$と$2x + y - 3z = 2$を満たす。

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 7$が常に成り立つとき、a , b , c の値を求めよ。

20. (1) $x^3 + ax^2 + 4x - 1$を$x^2 - x + 1$で割ると、商が $bx+1$ であるという。このとき、定数 a , b と余りを求めよ。

(2) x の 3 次式$f(x)$は、$(x+1)^2$で割ると割り切れ、$(x-1)^2$で割ると 8 余る。このとき、$f(x)$を求めよ。

21. $x^4 + 2x^3 + ax^2 + 8x + b$がある整式の平方となるような定数 a , b の値を求めよ。

22. $10x^2 + 21xy - 5y^2 = a(2x+y)^2 - b(x-2y)^2 + cxy$が x , y についての恒等式となるように定数 a , b , c の値を求めよ。

23. 次の式が x についての恒等式となるように定数 A, B, C の値を定めよ。

(1) $\frac{2x+3}{(x+2)(x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+4}$　　(2) $\frac{5x+3}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$

(3) $\frac{5x+1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

24. (1) $f(x+1)-f(x)=x^2-2x+2$, $f(0)=0$となるような整式$f(x)$を求めよ。

(2) $f(x^2)=x^3f(x-1)+6x^4+3x^2$となるような整式$f(x)$を求めよ。

25. 次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ax-by)^2$

(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

$$=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$$

26. $a+b+c=0$のとき、$a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+)(c+a)=0$を証明せよ。

27. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$とする。

n が奇数のとき、$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{(a+b+c)^n}$が成り立つことを示せ。

28. (1) $a+b+c=1$, $ab+bc+ca=abc$のとき、実数 a , b , c のうち少なくとも 1 つは 1 に等しいことを証明せよ。

(2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$ならば、実数 x , y , z のうち少なくとも 2 つは等しくなることを示せ。

(3) $a+b+c=ab+bc+ca=3$のとき、実数 a , b , c がすべて 1 であることを証明せよ。

29. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$のとき、等式$\frac{a}{b}=\frac{pa+qc}{pb+qd}=\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$が成り立つことを示せ。

30. 正数 a , b , c , d に対し、$a:b=b:c=c:d$が成り立つとする。このとき、
$(a+b):(b+c)=(b+c):(c+d)$が成り立つことを示せ。

31. $\frac{x+y}{5}=\frac{y+z}{6}=\frac{z+x}{7}\ (\neq 0)$のとき、$\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$の値を求めよ。

32. $\frac{2(a+b)}{c}=\frac{2(b+c)}{a}=\frac{2(c+a)}{b}$のとき、この式の値を求めよ。

33. $|a|<1\,,|b|<1\,,|c|<1\,,|d|<1$のとｋ、次の不等式が成り立つことを示せ。

(1) $ab+1>a+b$　　(2) $abc+2>a+b+c$　　(3) $abcd+3>a+b+c+d$

34. 次の不等式を証明せよ。

(1) $x\geqq 0\,,y\geqq 0$のとき、$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}\geqq\frac{x+y}{1+x+y}$

(2) $x\geqq 0\,,y\geqq 0\,,z\geqq 0$のとき、$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\geqq\frac{x+y+z}{1+x+y+z}$

35. 次の不等式を証明せよ。また、等号成立条件を示せ。

(1) $a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$　　(2) $a^4+b^4+c^4\geqq abc(a+b+c)$

36. $a+b+c=1$のとき、$a^2+b^2+c^2\geqq\frac{1}{3}$が成り立つことを示せ。

37. $a\,,b\,,x\,,y$ は正の実数とする。次の不等式が成り立つことを示せ。また、等号成立条件を調べよ。

$a+b=1$のとき、$\sqrt{ax+by}\geqq a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$

38. 次の不等式が成り立つことを示せ。

$a\geqq 0\,,b\geqq 0\,,c\geqq 0$のとき $\sqrt{a+b+c}\leqq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqq\sqrt{3(a+b+c)}$

39. $|x|<1\,,|y|<1$のとき、$|xy+1|>|x+y|$が成り立つことを示せ。

40. $a\,,b$ を実数とするとき、次の不等式を証明せよ。また、等号成立条件を示せ。

$\sqrt{4a^2+9b^2}\leqq 2|a|+3|b|\leqq\sqrt{13(a^2+b^2)}$

41. $x\,,y\,,z$ を実数とするとき、次の不等式を証明せよ。

(1) $|x|+|y|\geqq|x+y|$

(2) $|x+y|\geqq|x|-|y|$

(3) $|x|+|y|+|z|\geqq|x+y+z|$

42. $x \geqq y \geqq 0$のとき、次の不等式を証明せよ。

(1) $\frac{x}{1+x} \geqq \frac{y}{1+y}$

(2) $\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \geqq \frac{|x+y|}{1+|x+y|}$

(3) $\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$

43. 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $a \geqq b\,, x \geqq y$のとき、$2(ax + by) \geqq (a + b)(x + y)$

(2) $a \geqq b \geqq c\,, x \geqq y \geqq z$のとき、$3(a + b + c)(x + y + z)$

44. $a\,, b\,, c$ を正の実数とするとき、不等式が成り立つことを証明せよ。(A)を用いてもよい。

$a \geqq b \geqq c\,, x \geqq y \geqq z$のとき、$3(a + b + c)(x + y + z)$ ……… (A)

(1) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqq (a + b + c)^2$　　(2) $9(a^3 + b^3 + c^3) \geqq (a + b + c)^3$

45. (1) $x > 0$のとき、$x + \frac{1}{x} \geqq 2$が成り立つことを証明せよ。

(2) $x > 0$のとき、$x + \frac{1}{x}$の最小値を求めよ。

46. $x > 0$のとき、$y = x + \frac{1}{x}$のとりうる値の範囲を求めよ。

47. $x \geqq 0$ のとき、$x^2 + 1$の最小値を求めよ。

48. (1) $x > 0\,, y > 0$のとき、$\left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{4}{x}\right)$の最小値を求めよ。

(2) $x > 0\,, y > 0\,, z > 0\,, x + y + z = 3$のとき、$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$の最小値を求めよ。

49. (1) $x > 0$のとき、$x + \frac{9}{x+2}$の最小値を求めよ。

(2) $x > 0$のとき、$x + \frac{1}{x^2}$の最小値を求めよ。

(3) $x^2 + x + \frac{1}{x^2+x+1}$の最小値を求めよ。

50. 長方形の周の長さが 16 であるとき、面積の最大値を求めよ。

51. 次の不等式を証明せよ。また、等号成立条件を示せ。

(1) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqq (ax + by)^2$

(2) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqq (ax + by + cz)^2$

52. a , b , c を実数とするとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

(1) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geqq (a + b + c)^2$　　(2) $a^2 + b^2 + c^2 \geqq ab + bc + ca$

53. a , b , c を実数、x , y , z を正数とする。

このとき、$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$が成り立つことを示せ。

54. a , b , c , x , y , z は正数とする。

$a + b + c = 1$のとき、$\sqrt{ax + by + cz} \geqq a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z}$が練り立つことを示せ。

55. x , y , z は実数、$x + 2y + 3z = 1$のとき、$x^2 + y^2 + z^2$の最小値を求めよ。

56. x , y , z は実数、$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$のとき、$x + 2y + 3z$の最大値と最小値を求めよ

57. a , b , c を正数とするとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

(1) $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \geqq 6abc$

(2) $(a + b)(b + c)(c + a) \geqq 8abc$　　(3) $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geqq 6$

(4) $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqq 9$　　(5) $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geqq 9abc$

58. 三角形の 3 辺の長さを a , b , c とするとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$abc \geqq (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$　　（レムスの不等式）

59. $a \geqq \sqrt{2}$を満たすとき、$\frac{a+2}{a+1}$, $\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$, $\sqrt{2}$の大小を不等式を用いて表せ。

60. a を正の有理数とする。

(1) $\sqrt{2}$は a と$\frac{a+2}{a+1}$との間にあることを示せ。

(2) $\frac{a+2}{a+1}$の方が a より$\sqrt{2}$に近いことを示せ。