

## No2 複素数と方程式

61. 次の計算をせよ。

(1)  $(2 - i)^3$

(2)  $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{50}$

(3)  $(\sqrt{3} + \sqrt{-2})(\sqrt{-6} - \sqrt{4})$

(4)  $\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4}$

(5)  $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} - \sqrt{\frac{8}{-2}}$

(6)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

(7)  $\frac{1+i}{3-2i} + \frac{1-3i}{1+2i}$

(8)  $\frac{4-3i}{4+3i} + \frac{4+3i}{4-3i}$

62. 次の等式を満たす実数  $x, y$  の値を求めよ。

(1)  $(1 + 2i)x + (4 + 3i)y = -2 + i$

(2)  $\frac{i}{1-xi} + \frac{x}{y+i} = 0$

63.  $z = \frac{5+xi}{2-i}$  が実数となるときと純虚数になるときの実数  $x$  の値をそれぞれ求めよ。

64. (1)  $z^2 = 5 - 12i$  となる複素数  $z$  を全て求めよ。

(2)  $z^3 = -8i$  となる複素数  $z$  を全て求めよ。

(3)  $z^3 = 2 - 11i$  となる複素数  $z$  を全て求めよ。ただし、 $z$  の実部と虚部は整数とする。

65. 次の 2 次方程式を解け。

(1)  $3x^2 - x + 2 = 0$

(2)  $\sqrt{3}x^2 - 2x + 4\sqrt{3} = 0$

66.  $k$  を実数定数とするとき、方程式  $kx^2 - 6x + 1 = 0$  の解の種類を判別せよ。

67. (1)  $x$  の方程式  $(1 - i)x^2 - (k + i)x + 1 + ki = 0$  が実数解をもつように実数  $k$  の値を定めよ。

(2)  $x$  の方程式  $(1 - i)x^2 - (k + 3i)x - 2 + ki = 0$  が純虚数解をもつように実数  $k$  の値を定めよ。

68.  $x = \frac{1-\sqrt{7}i}{2}$  のとき、 $x^3 + 3x^2 - 8x + 5$  の値を求めよ。

69. 2次方程式 $2x^2 - 8x + 5 = 0$ の2解を $\alpha, \beta$ とする。次の式の値を求めよ。

- (1)  $\alpha^2 + \beta^2$       (2)  $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$       (3)  $\alpha - \beta$       (4)  $\alpha^3 - \beta^3$   
(5)  $\alpha^4 + \beta^4$       (6)  $\alpha^5 + \beta^5$       (7)  $(\alpha - 2)(\beta - 2)$       (8)  $(\alpha - 2)^4 + (\beta - 2)^4$

70. 2次方程式 $x^2 - 12x + k = 0$ の2解が次の条件を満たすような定数 $k$ の値を求めよ。

- (1) 2つの解の差が4      (2) 一方の解が他方の解の5倍  
(3) 一方の解が他方の解の2乗      (4) 2つの解の比が5:7

71. (1) 5と-2を解にもつ2次方程式を1つ作成せよ。

(2)  $2 + 3i$ を解にもつ実数係数の2次方程式を1つ作成せよ。

(3) 和が-2, 積が4となる2数を求めよ。

72.  $x^2 - 2x + 7 = 0$ の2つの解を $\alpha, \beta$ とするとき、次の2数を解にもつ2次方程式を1つ作成せよ。

- (1)  $\alpha + \beta, \alpha\beta$       (2)  $2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta$       (3)  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

73. 次の連立方程式を解け。

(1)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$       (2)  $\begin{cases} x + xy + y = -5 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

74. 連立方程式  $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = 3 \\ xyz = 1 \end{cases}$  を解け。

75. 連立方程式  $\begin{cases} x = y^2 - 2 \dots\dots \textcircled{1} \\ y = x^2 - 2 \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$  を解け

76. 次の式を複素数の範囲で因数分解せよ。

- (1)  $x^4 - x^2 - 6$       (2)  $x^2 - 3x + 4$       (3)  $\frac{1}{2}x^2 + x + 5$       (4)  $x^4 - x^2 + 1$

77.  $2x^2 + 7xy + 3y^2 - 5x - 5y + k$ が $x, y$ についての1次式の積に因数分解できるときの定数 $k$ の値を求めよ。また、その $k$ のとき、因数分解せよ。

78. 2次方程式 $x^2 - ax + a^2 - 3a = 0$ が、次の条件を満たすような定数 $a$ の値の範囲を求めよ。

- (1) 正の実数解と負の実数解をもつ。
- (2) 異なる2つの正の実数解をもつ。
- (3) 2より大きい実数解と2より小さい実数解をもつ。
- (4) 2より小さい異なる2つの実数解をもつ。

79. (1)  $2x^3 - 7x^2 + 16$ を $x - 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(2)  $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + x - 6$ を $2x + 1$ で割ったときの商と余りを求めよ。

80. (1) 整式 $P(x) = x^3 + ax^2 - 2x + b$ を $x - 2$ で割ると3余り、 $x + 1$ で割ると $-3$ 余るとき、定数 $a, b$ の値を定めよ。

(2) 整式 $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + ax + b$ が $2x^2 + x - 3$ で割り切れるように、定数 $a, b$ の値を定めよ。

81. (1)  $x^n$  ( $n \geq 2$ )を $x^2 - 1$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)  $x^{11}$ を $x^2 + 1$ で割ったときの余りを求めよ。

(3) 整式 $P(x)$ は $x - 1$ で割ると余りが4、 $(x + 1)(x + 2)$ で割ると余りが $-3x - 5$ である。このとき、 $P(x)$ を $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$ で割ったときの余りを求めよ。

(4) 整式 $P(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割ると余りが $2x - 1$ 、 $x - 3$ で割ると余りが7である。このとき、 $P(x)$ を $x^3 - 1$ で割ったときの余りを求めよ。

(5) 整式 $P(x)$ は $(x - 2)^2$ で割ると余りが $2x + 5$ 、 $x - 1$ で割ると余りが15である。このとき、 $P(x)$ を $(x - 2)^2(x - 3)$ で割ったときの余りを求めよ。

82.  $x^n$  ( $n \geq 2$ )を $(x - 1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

83. 次の方程式を解け。

(1)  $2x^3 - x^2 - 10x + 8 = 0$

(2)  $9x^3 - 18x^2 + 8x - 5 = 0$

84. 次の方程式を解け。

(1)  $x^3 = 27$

(2)  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

(3)  $x^4 - x^2 - 6 = 0$

(4)  $x^4 - x^2 + 1 = 0$

(5)  $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 8 = 0$

(6)  $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 3 \cdot 4 \cdot 5$

(6)  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 15$

85. (1) 4次方程式 $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$ を解け。

(2) 5次方程式 $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ を解け。



94. (1) 実数解  $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$  をもつ係数が整数の 3 次方程式を 1 つ求めよ。

(2)  $x$  が整数であることを示せ。

解答

61. (1)  $2 - 11i$             (2)  $-1 + i$             (3)  $-4\sqrt{3} + \sqrt{2}i$             (4)  $2 + 2i$   
(5)  $2 - 2i$             (6)  $-1$             (7)  $-\frac{12}{13} - \frac{8}{13}i$             (8)  $\frac{14}{25}$

62. (1)  $x = 2, y = -1$             (2)  $x = 1, y = 1$

63. 実数  $x = -\frac{5}{2}$     純虚数  $x = 10$

64. (1)  $z = \pm(3 - 2i)$             (2)  $z = 2i, \pm\sqrt{3} - i$             (3)  $z = 2 - i$

65. (1)  $x = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{6}$             (2)  $x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{33}i}{3}$

66.  $k = 0$  のとき 1 つの実数解     $k < 0, 0 < k < 9$  のとき異なる 2 つの実数解  
 $k = 9$  のとき重解             $k > 9$  のとき異なる 2 つの虚数解

67. (1)  $k = 2$             (2)  $k = 4$

68.  $-6 + 3\sqrt{7}i$

69. (1) 11            (2)  $\frac{68}{5}$             (3)  $\pm\sqrt{6}$             (4)  $\pm\frac{27\sqrt{6}}{2}$

(5)  $\frac{217}{2}$             (6) 349            (7)  $-\frac{3}{2}$             (8)  $\frac{9}{2}$

70. (1)  $k = 32$             (2)  $k = 20$             (3)  $k = -64, 27$             (4)  $k = 35$

71. (1)  $x^2 - 3x - 10 = 0$             (2)  $x^2 - 4x + 13 = 0$             (3)  $x = -1 \pm \sqrt{3}i$

72. (1)  $x^2 - 9x + 14 = 0$             (2)  $x^2 - 6x + 15 = 0$             (3)  $7x^2 - 2x + 1 = 0$

73. (1)  $(x, y) = (2, 3), (3, 2)$             (2)  $(x, y) = (-3, 1), (1, -3), (\sqrt{5}, -\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

74.  $x = y = z = 1$

75.  $(x, y) = (-1, -1), (2, 2), \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$

76. (1)  $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$             (2)  $\frac{1}{4}(2x - 3 - \sqrt{7}i)(2x - 3 + \sqrt{7}i)$

(3)  $\frac{1}{2}(x + 1 - 3i)(x + 1 + 3i)$

(4)  $\frac{1}{16}(2x + \sqrt{3} - i)(2x + \sqrt{3} + i)(2x - \sqrt{3} - i)(2x - \sqrt{3} + i)$

77.  $k = 2$      $(2x + y - 1)(x + 3y - 2)$

78. (1)  $0 < a < 3$             (2)  $3 < a < 4$             (3)  $1 < a < 4$             (4)  $0 < a < 1$

79. (1) 商  $2x^2 - 3x - 6$  余り 4            (2) 商  $x^3 - 3x^2 + 5x - 2$  余り -4

80. (1)  $a = 1, b = -5$             (2)  $a = -11, b = 15$

81. (1)  $\frac{1 - (-1)^n}{2}x + \frac{1 + (-1)^n}{2}$             (2)  $-x$             (3)  $2x^2 + 3x - 1$             (4)  $2x^2 + 4x + 1$

(5)  $4x^2 - 14x + 21$

82.  $nx - n + 1$

83. (1)  $x = 2, \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$             (2)  $x = \frac{5}{3}, \frac{1 \pm \sqrt{11}i}{6}$

84. (1)  $x = 3, \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$       (2)  $x = 2$       (3)  $x = \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}i$       (4)  $x = \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}, \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$

(5)  $x = 1, 2, 1 \pm \sqrt{5}$       (6)  $x = 2, -4 \pm \sqrt{11}i$       (7)  $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{11}i}{2}$

85. (1)  $x = \pm i, 2 \pm \sqrt{3}$       (2)  $x = -1, \pm i, 2 \pm \sqrt{3}$

86. (1)  $-1$       (2)  $4$       (3)  $1$       (4)  $1$

87. (1)  $b \neq 0$  と仮定すると  $z = -\frac{a}{b}$  より矛盾 (虚数 = 実数)      (2)  $x + 2$

88.  $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}, \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$  を利用

89. (1)  $4$       (2)  $-12$       (3)  $8$       (4)  $-3$       (5)  $4$

90. (1)  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$       (2)  $(x, y, z) = (2, 1, -3)$       (3)  $x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$

91.  $a = -1, b = 0$       他の解  $x = -1, 1 + i$

92. (1)  $a = -\frac{1}{6}, 0, 4$       (2)  $a < -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6} < a < 0, 4 < a$

93. (1) 右辺の 2 項と 3 項の展開による。

(2)  $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}, \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\omega + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\omega^2, \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\omega^2 + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\omega$

94. (1)  $x^3 + 3x - 14 = 0$       (2)  $x^3 + 3x - 14 = (x - 2)(x^2 + 2x + 7) = 0$  より