

No2 複素数と方程式

61. 次の計算をせよ。

(1) $(2 - i)^3$

(2) $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{50}$

(3) $(\sqrt{3} + \sqrt{-2})(\sqrt{-6} - \sqrt{4})$

(4) $\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4}$

(5) $\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} - \sqrt{\frac{8}{-2}}$

(6) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

(7) $\frac{1+i}{3-2i} + \frac{1-3i}{1+2i}$

(8) $\frac{4-3i}{4+3i} + \frac{4+3i}{4-3i}$

62. 次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

(1) $(1 + 2i)x + (4 + 3i)y = -2 + i$

(2) $\frac{i}{1-xi} + \frac{x}{y+i} = 0$

63. $z = \frac{5+xi}{2-i}$ が実数となるときと純虚数になるときの実数 x の値をそれぞれ求めよ。

64. (1) $z^2 = 5 - 12i$ となる複素数 z を全て求めよ。

(2) $z^3 = -8i$ となる複素数 z を全て求めよ。

(3) $z^3 = 2 - 11i$ となる複素数 z を全て求めよ。ただし、 z の実部と虚部は整数とする。

65. 次の2次方程式を解け。

(1) $3x^2 - x + 2 = 0$

(2) $\sqrt{3}x^2 - 2x + 4\sqrt{3} = 0$

66. k を実数定数とするとき、方程式 $kx^2 - 6x + 1 = 0$ の解の種類を判別せよ。

67. (1) x の方程式 $(1 - i)x^2 - (k + i)x + 1 + ki = 0$ が実数解をもつように実数 k の値を定めよ。

(2) x の方程式 $(1 - i)x^2 - (k + 3i)x - 2 + ki = 0$ が純虚数解をもつように実数 k の値を定めよ。

68. $x = \frac{1-\sqrt{7}i}{2}$ のとき、 $x^3 + 3x^2 - 8x + 5$ の値を求めよ。

69. 2次方程式 $2x^2 - 8x + 5 = 0$ の2解を α, β とする。次の式の値を求めよ。

- (1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ (3) $\alpha - \beta$ (4) $\alpha^3 - \beta^3$
(5) $\alpha^4 + \beta^4$ (6) $\alpha^5 + \beta^5$ (7) $(\alpha - 2)(\beta - 2)$ (8) $(\alpha - 2)^4 + (\beta - 2)^4$

70. 2次方程式 $x^2 - 12x + k = 0$ の2解が次の条件を満たすような定数 k の値を求めよ。

- (1) 2つの解の差が4 (2) 一方の解が他方の解の5倍
(3) 一方の解が他方の解の2乗 (4) 2つの解の比が5:7

71. (1) 5と-2を解にもつ2次方程式を1つ作成せよ。

(2) $2 + 3i$ を解にもつ実数係数の2次方程式を1つ作成せよ。

(3) 和が-2, 積が4となる2数を求めよ。

72. $x^2 - 2x + 7 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、次の2数を解にもつ2次方程式を1つ作成せよ。

- (1) $\alpha + \beta, \alpha\beta$ (2) $2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta$ (3) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

73. 次の連立方程式を解け。

- (1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + xy + y = -5 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$

74. 連立方程式 $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx = 3 \\ xyz = 1 \end{cases}$ を解け。

75. 連立方程式 $\begin{cases} x = y^2 - 2 \dots\dots \textcircled{1} \\ y = x^2 - 2 \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$ を解け

76. 次の式を複素数の範囲で因数分解せよ。

- (1) $x^4 - x^2 - 6$ (2) $x^2 - 3x + 4$ (3) $\frac{1}{2}x^2 + x + 5$ (4) $x^4 - x^2 + 1$

77. $2x^2 + 7xy + 3y^2 - 5x - 5y + k$ が x, y についての1次式の積に因数分解できるときの定数 k の値を求めよ。また、その k のとき、因数分解せよ。

78. 2次方程式 $x^2 - ax + a^2 - 3a = 0$ が、次の条件を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ。

- (1) 正の実数解と負の実数解をもつ。
- (2) 異なる2つの正の実数解をもつ。
- (3) 2より大きい実数解と2より小さい実数解をもつ。
- (4) 2より小さい異なる2つの実数解をもつ。

79. (1) $2x^3 - 7x^2 + 16$ を $x - 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(2) $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + x - 6$ を $2x + 1$ で割ったときの商と余りを求めよ。

80. (1) 整式 $P(x) = x^3 + ax^2 - 2x + b$ を $x - 2$ で割ると3余り、 $x + 1$ で割ると -3 余るとき、定数 a, b の値を定めよ。

(2) 整式 $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + ax + b$ が $2x^2 + x - 3$ で割り切れるように、定数 a, b の値を定めよ。

81. (1) x^n ($n \geq 2$)を $x^2 - 1$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) x^{11} を $x^2 + 1$ で割ったときの余りを求めよ。

(3) 整式 $P(x)$ は $x - 1$ で割ると余りが4、 $(x + 1)(x + 2)$ で割ると余りが $-3x - 5$ である。このとき、 $P(x)$ を $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$ で割ったときの余りを求めよ。

(4) 整式 $P(x)$ は $x^2 + x + 1$ で割ると余りが $2x - 1$ 、 $x - 3$ で割ると余りが7である。このとき、 $P(x)$ を $x^3 - 1$ で割ったときの余りを求めよ。

(5) 整式 $P(x)$ は $(x - 2)^2$ で割ると余りが $2x + 5$ 、 $x - 1$ で割ると余りが15である。このとき、 $P(x)$ を $(x - 2)^2(x - 3)$ で割ったときの余りを求めよ。

82. x^n ($n \geq 2$)を $(x - 1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

83. 次の方程式を解け。

(1) $2x^3 - x^2 - 10x + 8 = 0$

(2) $9x^3 - 18x^2 + 8x - 5 = 0$

84. 次の方程式を解け。

(1) $x^3 = 27$

(2) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$

(3) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

(4) $x^4 - x^2 + 1 = 0$

(5) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x - 8 = 0$

(6) $(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 3 \cdot 4 \cdot 5$

(6) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 15$

85. (1) 4次方程式 $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$ を解け。

(2) 5次方程式 $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$ を解け。

86. $x^2 + x + 1 = 0$ の解の 1 つを ω とするとき、次の値を求めよ。

(1) $\frac{1}{\omega^{20}} + \frac{1}{\omega^{10}}$ (2) $(1 + \omega - \omega^2)(1 - \omega + \omega^2)$

(3) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{30}$

(4) ${}_6C_0 + {}_6C_1\omega + {}_6C_2\omega^2 + {}_6C_3\omega^3 + {}_6C_4\omega^4 + {}_6C_5\omega^5 + {}_6C_6\omega^6$

87. (1) a, b を実数, z を虚数とすると、 $a + bz = 0 \Leftrightarrow a = 0$ かつ $b = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $2x^{100} + 3x^{99} + x^{98}$ を $x^2 + x + 1$ で割ったときの余りを求めよ。

88. 実数係数の n 次方程式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ がある。この方程式が虚数解 α を解にもつとき、その共役複素数 $\bar{\alpha}$ も解にもつことを示せ。

89. 3 次方程式 $x^3 - 2x + 4 = 0$ の 3 解を α, β, γ とするとき、次の値を求めよ。

(1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(2) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

(3) $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$

(4) $(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)$

(5) $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$

90. (1) $-1, 2, 3$ を 3 解とする 3 次方程式を 1 つ作成せよ。

(2) 連立方程式 $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 14, x^3 + y^3 + z^3 = -18$ を解け。

ただし、 $x \geq y \geq z$ とする。

(3) $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とするとき、 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ を 3 つの解にもつ 3 次方程式を 1 つ作成せよ。

91. 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ が $x = 1 - i$ を解にもつ。このとき、実数 a, b の値と他の解を求めよ。

92. a を実数定数とする。3 次方程式 $x^3 + (2a - 1)x^2 + 2ax - 4a = 0$ について、次の問いに答えよ。

(1) 2 重解をもつように定数 a の値を求めよ。

(2) 異なる 3 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

93. (1) 1 の虚数立方根の 1 つを ω とするとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = (a - b - c)(a - b\omega - c\omega^2)(a - b\omega^2 - c\omega)$$

(2) (1) を利用して $x^3 + 3x - 14 = 0$ の解をすべて求めよ。 ω を用いて答えてよい。

94. (1) 実数解 $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ をもつ係数が整数の 3 次方程式を 1 つ求めよ。

(2) x が整数であることを示せ。

解答

61. (1) $2 - 11i$ (2) $-1 + i$ (3) $-4\sqrt{3} + \sqrt{2}i$ (4) $2 + 2i$
(5) $2 - 2i$ (6) -1 (7) $-\frac{12}{13} - \frac{8}{13}i$ (8) $\frac{14}{25}$

62. (1) $x = 2, y = -1$ (2) $x = 1, y = 1$

63. 実数 $x = -\frac{5}{2}$ 純虚数 $x = 10$

64. (1) $z = \pm(3 - 2i)$ (2) $z = 2i, \pm\sqrt{3} - i$ (3) $z = 2 - i$

65. (1) $x = \frac{1 \pm \sqrt{23}i}{6}$ (2) $x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{33}i}{3}$

66. $k = 0$ のとき 1 つの実数解 $k < 0, 0 < k < 9$ のとき異なる 2 つの実数解
 $k = 9$ のとき重解 $k > 9$ のとき異なる 2 つの虚数解

67. (1) $k = 2$ (2) $k = 4$

68. $-6 + 3\sqrt{7}i$

69. (1) 11 (2) $\frac{68}{5}$ (3) $\pm\sqrt{6}$ (4) $\pm\frac{27\sqrt{6}}{2}$

(5) $\frac{217}{2}$ (6) 349 (7) $-\frac{3}{2}$ (8) $\frac{9}{2}$

70. (1) $k = 32$ (2) $k = 20$ (3) $k = -64, 27$ (4) $k = 35$

71. (1) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (2) $x^2 - 4x + 13 = 0$ (3) $x = -1 \pm \sqrt{3}i$

72. (1) $x^2 - 9x + 14 = 0$ (2) $x^2 - 6x + 15 = 0$ (3) $7x^2 - 2x + 1 = 0$

73. (1) $(x, y) = (2, 3), (3, 2)$ (2) $(x, y) = (-3, 1), (1, -3), (\sqrt{5}, -\sqrt{5}), (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

74. $x = y = z = 1$

75. $(x, y) = (-1, -1), (2, 2), \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$

76. (1) $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i)$ (2) $\frac{1}{4}(2x - 3 - \sqrt{7}i)(2x - 3 + \sqrt{7}i)$

(3) $\frac{1}{2}(x + 1 - 3i)(x + 1 + 3i)$

(4) $\frac{1}{16}(2x + \sqrt{3} - i)(2x + \sqrt{3} + i)(2x - \sqrt{3} - i)(2x - \sqrt{3} + i)$

77. $k = 2$ $(2x + y - 1)(x + 3y - 2)$

78. (1) $0 < a < 3$ (2) $3 < a < 4$ (3) $1 < a < 4$ (4) $0 < a < 1$

79. (1) 商 $2x^2 - 3x - 6$ 余り 4 (2) 商 $x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ 余り -4

80. (1) $a = 1, b = -5$ (2) $a = -11, b = 15$

81. (1) $\frac{1 - (-1)^n}{2}x + \frac{1 + (-1)^n}{2}$ (2) $-x$ (3) $2x^2 + 3x - 1$ (4) $2x^2 + 4x + 1$

(5) $4x^2 - 14x + 21$

82. $nx - n + 1$

83. (1) $x = 2, \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$ (2) $x = \frac{5}{3}, \frac{1 \pm \sqrt{11}i}{6}$

84. (1) $x = 3, \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ (2) $x = 2$ (3) $x = \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}i$ (4) $x = \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}, \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$

(5) $x = 1, 2, 1 \pm \sqrt{5}$ (6) $x = 2, -4 \pm \sqrt{11}i$ (7) $x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{11}i}{2}$

85. (1) $x = \pm i, 2 \pm \sqrt{3}$ (2) $x = -1, \pm i, 2 \pm \sqrt{3}$

86. (1) -1 (2) 4 (3) 1 (4) 1

87. (1) $b \neq 0$ と仮定すると $z = -\frac{a}{b}$ より矛盾 (虚数 = 実数) (2) $x + 2$

88. $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}, \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}$ を利用

89. (1) 4 (2) -12 (3) 8 (4) -3 (5) 4

90. (1) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ (2) $(x, y, z) = (2, 1, -3)$ (3) $x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$

91. $a = -1, b = 0$ 他の解 $x = -1, 1 + i$

92. (1) $a = -\frac{1}{6}, 0, 4$ (2) $a < -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6} < a < 0, 4 < a$

93. (1) 右辺の 2 項と 3 項の展開による。

(2) $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}, \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\omega + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\omega^2, \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\omega^2 + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\omega$

94. (1) $x^3 + 3x - 14 = 0$ (2) $x^3 + 3x - 14 = (x - 2)(x^2 + 2x + 7) = 0$ より