

No9 整式の微分

1. 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x - 3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x+3} \right)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 1$ を満たす定数 a, b の値を求めよ。

3. $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$ とする。微分係数の定義に基づき、 $f'(1)$ を求めよ。

4. 次微分係数 $f'(a)$ が存在するとき、次の極限值を $a, f(a), f'(a)$ を用いて表せ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{h}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+5h) - f(a-2h)}{h}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^2 f(x) - x^2 f(a)}{x - a} \quad (a \neq 0)$$

5. (1) $f(x) = c$ (c : 定数) の導関数を定義に基づいて求めよ。

(2) $f(x) = x^n$ (n : 自然数) の導関数を定義に基づいて求めよ。

6. 次の関数を微分せよ。ただし、(1)は定義に基づいて微分せよ。

$$(1) y = \frac{1}{x}$$

$$(2) y = 4x^3 - 3x^2 + 6x - 5$$

$$(3) y = (x^2 + 1)(x + 3)$$

$$(4) y = (2x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$(5) y = (x - 1)^4$$

$$(6) y = (2x - 1)^3$$

$$(7) y = (x - 2)^3(x - 3)$$

7. (1) $f(x) = 2x^{n+1} + 3x^n$ (n : 自然数) を $(x - 1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) 整式 $f(x)$ を $(x - a)^2$ で割ったときの余りを $a, f(a), f'(a)$ を用いて表せ。

8. $(x - 1)f'(x) - 2f(x) = 4, f(0) = 0$ を満たす整式 $f(x)$ を求めよ。

9. (1) 曲線 $y = x^3 - 4x$ 上の $x = -1$ の点における接線の方程式を求めよ。

(2) 曲線 $y = x^2 + 3x - 2$ において、傾きが 5 であるような接線の方程式を求めよ。

10. (1) 点 $(0, -1)$ から曲線 $y = x^2$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(2) 曲線 $y = x^2$ 上の点 $(1, 1)$ と $(0, 0)$ における法線の方程式を求めよ。

11. 2 曲線 $y = -x^2 + 1, y = x^2 - 2x + 2$ の共通接線の方程式を求めよ。

12. 2 曲線 $y = x^3 - x, y = x^2 + a$ が共有点をもち、その点で接している。そのときの定数 a の値と、その接点における共通接線の方程式を求めよ。

13. 2 曲線 $y = x^3 + \frac{3}{4}x, y = \frac{2}{3}x^2 + a$ が共有点をもち、その共有点で直交しているとする。そのときの定数 a の値と、その共有点におけるそれぞれの曲線の接線の方程式を求めよ。

14. 放物線 $y = x^2$ 上の異なる 2 点 A, B における 2 本の接線が直交する。このとき、2 本の接線の交点の軌跡を求めよ。

15. 放物線 $C: y = x^2$ 上に点 $P(a, a^2)$ ($a > 0$) がある。また、直線 $x = a$ を l_1 とする。

(1) C 上の点 P における法線 n に関して、直線 l_1 と対称な直線 l_2 の方程式を求めよ。

(2) C 上の点 P における接線 m に関して、直線 l_1 と対称な直線を l_3 とする。

2 直線 m, l_1 のなす角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とするとき、2 直線 m と l_3 の傾きを θ で表せ。また、

l_3 の方程式を a で表せ。

(3) l_1, l_3 が定点を通ることを示し、その座標を求めよ。

16. $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 8$ ($x \geq -1$) の増減を調べ、グラフを書け。また、極値があれば求めよ。

17. 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 10$

(2) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$

(3) $y = -x^3 - 3x^2 - 6x - 8$

18. $f(x) = x^3 + kx^2 + 3x + 3$ が極値をもたないような定数 k の値の範囲を求めよ。

19. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 + 2a - 4)x - 1$ とする。

(1) $f(x)$ が $x > 1$ で極大値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ が $x > 1$ で極小値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

20. 3 次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $x = -1$ で極大値 6, $x = 1$ で極小値をとる。このとき、定数 a, b, c の値と極小値を求めよ。

21. $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 11x + 5$ の極値を求めよ。

22. $f(x) = x^3 - 2x + 1$ 上の点 $(-1, 2)$ における接線が、再び $f(x)$ と交わる点の x 座標を求めよ。

23. a, b, c, d を実数とし、3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とする。

(1) $y = f(x)$ 上の 2 点 $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ ($\alpha \neq \beta$) における接線が平行であるとき、線分 AB の中点 M は定点であり、かつ $y = f(x)$ 上にあることを示せ。

(2) $y = f(x)$ のグラフが点 M に関して点対称であることを示せ。

24. $f(x) = x^3 - 3kx^2 + 3x$ の極大値と極小値の和が 2 になるとき、定数 k の値を求めよ。

25. $f(x) = x^3 - 3kx^2 + 3x + 5$ の極大値と極小値の差が $12\sqrt{3}$ になるとき、定数 k の値を求めよ。

26. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 5$ の極大値と極小値の差を求めよ。

27. a を定数とすると、 $f(x) = -x^3 + 3ax^2$ ($0 \leq x \leq 1$) の最大値を求めよ。

28. $a > 0$ とすると、 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ ($0 \leq x \leq a$) の最大値を求めよ。

29. a を定数とする。 $f(x) = -x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ ($a \leq x \leq a + 1$) の最大値を求めよ。

30. a, b を定数、 $0 < a < 1$ とする。 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + b$ ($-1 \leq x \leq 2$) の最大値が 6, 最小値が 0 となるような a, b の値を求めよ。

31. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = 8^x - 6 \cdot 4^x + 9 \cdot 2^x + 1$ ($x \leq 2$)

(2) $y = 8^x + 8^{-x} - 3(4^x + 4^{-x}) - 6(2^x + 2^{-x}) + 4$

32. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = (\log_2 x)^3 - \log_2 x^3 \quad (\sqrt{2} \leq x \leq 4)$

(2) $y = \log_2(x+1) + 2\log_2(3-x)$

33. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y = \sin 3x + 4 \cos 2x + 8 \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$

(2) $y = \sin^3 x + \cos^3 x - 2 \sin 2x \quad (0 \leq x \leq \pi)$

34. 縦の長さ、横の長さ、高さの和が 12、表面積が 72 であるような直方体の体積の最大値を求めよ。

35. 実数 x, y, z が $x + y + z = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 2$ を満たすとき、 $x^3 + y^3 + z^3$ の最大値と最小値を求めよ。

36. 半径 1 の球に直円錐が内接している。

(1) 円錐の体積 V の最大値を求めよ。

(2) 円錐の側面積 S の最大値を求めよ。

37. $2x^3 - 3x^2 - 12x + k = 0$ が 3 つの実数解 $\alpha, \beta, \gamma \quad (\alpha < \beta < \gamma)$ をもつ。

(1) 定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) α, β, γ の値の範囲を求めよ。

38. a を定数とする。 $x^3 - 3ax^2 + 4a = 0$ の異なる実数解の個数を調べよ。

39. k を定数とする。点 $(1, k)$ から曲線 $y = x^3 - x$ に引ける接線の本数を求めよ。

40. 点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - x$ に異なる 3 本の接線が引けるとする。このとき、点 (a, b) の存在範囲を図示せよ。

41. 点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - x$ に引ける接線がちょうど 2 本あり、この 2 本の接線が直交するとき、点 (a, b) を求めよ。

42. 次の不等式が成り立つことを示せ。

(1) $x^3 - 9x \geq 3x^2 - 27 \quad (x \geq 1)$

(2) $x^3 + 15x > 6x^2 - 1 \quad (x > 0)$

43. a, b, c を正の定数とすると、 $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc$ が成り立つことを示せ。

44. $a > 0$ とする。不等式 $x^3 - 3x^2 > a(3x^2 - 12x - 2)$ ($x > 0$) が常に成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

45. 次の関数のグラフを書け。

(1) $y = x^4 - \frac{16}{3}x^3 + 6x^2 + 5$

(2) $y = -x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 20$

(3) $y = x^4 - 2x^3 - 8x$

(4) $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{4}$

46. 次の 4 次関数が極大値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) $f(x) = x^4 - 2(a-1)x^3 + 2a^2x^2$

(2) $f(x) = x^4 - 2ax^3 + a^2x$

47. 4 次関数 $y = x^4 - 2x^3 - 11x^2$ と異なる 2 点で接する直線の方程式を求めよ。

48. $f(x) = x^3 - 6x - 1$ について次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(2) 方程式 $f(x) = 0$ の解を $x = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とおくと、 θ の値を求めよ。

(3) $-\frac{4}{5} < \cos \frac{7}{9}\pi < -\frac{3}{4}$ が成り立つことを示せ。

(4) $\cos \frac{1}{9}\pi \cos \frac{5}{9}\pi \cos \frac{7}{9}\pi$ の値を求めよ。

解答

1. (1) 3 (2) $-\frac{3}{4}$ (3) 12 (4) $\frac{1}{9}$

2. $a = -3, b = 2$

3. $f'(1) = -1$

4. (1) $3f'(a)$ (2) $7f'(a)$ (3) $a^2f'(a) - 2af(a)$

5. (1) 0 (2) nx^{n-1}

6. (1) $-\frac{1}{x^2}$ (2) $12x^2 - 6x + 6$ (3) $3x^2 + 6x + 1$ (4) $6x^2 + 22x + 17$

(5) $4(x-1)^3$ (6) $6(2x-1)^2$ (7) $(x-2)^2(4x-11)$

7. (1) $(5n+2)x - 5n + 3$ (2) $f'(a)x + f(a) - af'(a)$

8. $f(x) = 2x^2 - 4x$

9. (1) $y = -x + 2$ (2) $y = 5x - 3$

10. (1) 接点 $(-1, 1)$ のとき $y = -2x - 1$, 接点 $(1, 1)$ のとき $y = 2x - 1$

(2) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, $x = 0$

11. $y = 1$, $y = -2x + 2$

12. $a = \frac{5}{27}$ のとき $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{27}$ $a = -1$ のとき $y = 2x - 2$

13. $a = -\frac{2}{3}$ $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$, $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$

14. $y = -\frac{1}{4}$

15. (1) $y = \frac{4a^2-1}{4a}x + \frac{1}{4}$ (2) (i) $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ のとき $m \rightarrow \frac{1}{\tan \theta}$ $l_3 \rightarrow \frac{1}{\tan 2\theta}$

(ii) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $m \rightarrow 1$ $l_3 \rightarrow 0$ (iii) $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $m \rightarrow \frac{1}{\tan \theta}$ $l_3 \rightarrow \frac{1}{\tan 2\theta}$

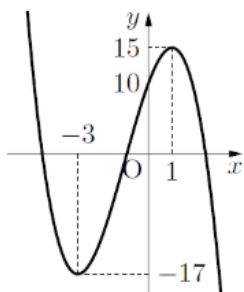
$l_3 : y = \frac{4a^2-1}{4a}x + \frac{1}{4}$

(3) $(0, \frac{1}{4})$

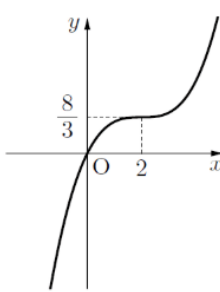
16. $\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \text{ のとき単調減少} \\ x \geq 0 \text{ のとき単調増加} \end{cases}$

$x = 0$ のとき極小値 -8

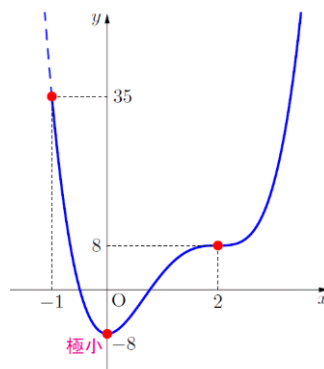
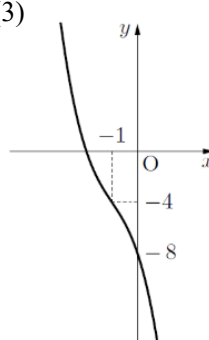
17. (1)



(2)



(3)



18. $-3 \leq x \leq 3$

19. (1) $\sqrt{3} < a < 2$ (2) $-\sqrt{3} < a < 2$

20. $a = 0, b = -3, c = 4$ 極小値 2

21. 極大値 $\frac{10+48\sqrt{3}}{9}$ 極小値 $\frac{10-48\sqrt{3}}{9}$

22. $x = 2$

23. (1) 略 (2) 略

24. $k = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

25. $k = \pm 2$

26. $12\sqrt{3}$

27. $a \leq 0 \rightarrow 0, 0 < a < \frac{1}{3} \rightarrow 4a^3, a = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{4}{27}, \frac{1}{3} < a < \frac{1}{2} \rightarrow 4a^3, a \geq \frac{1}{2} \rightarrow 3a - 1$

28. $0 < a \leq 2 \rightarrow 5, 2 < a < 3 \rightarrow 5, a = 3 \rightarrow 5, a > 3 \rightarrow a^3 - 3a^2 + 5$

29. $a < 1 \rightarrow a^3 - 6a^2 + 9a, 1 \leq a \leq 2 \rightarrow 4, 2 < a < \frac{15+\sqrt{33}}{6} \rightarrow a^3 - 9a^2 + 24a - 16$

$a = \frac{15+\sqrt{33}}{6} \rightarrow \frac{18-2\sqrt{33}}{9}, a > \frac{15+\sqrt{33}}{6} \rightarrow a^3 - 6a^2 + 9a$

30. $a = \frac{1}{3}, b = 2$

31. 最大値, 最小値の順に (1) 5, 1 (2) なし, -17

32. 最大値, 最小値の順に (1) 2, -2 (2) $8 - 3\log_2 3$, なし

33. 最大値, 最小値の順に (1) 7, 3 (2) $\frac{61}{27}, \frac{\sqrt{2}}{2} - 2$

34. 32

35. 最大値 $\frac{22}{9}$ 最小値 2

36. (1) $\frac{32}{81}\pi$ (2) $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

37. (1) $-7 < k < 20$ (2) $-\frac{5}{2} < \alpha < -1, -1 < \beta < 2, 2 < \gamma < \frac{7}{2}$

38. $-1 < a < 1 \rightarrow 1, a = \pm 1 \rightarrow 2, a < -1, a > 1 \rightarrow 3$

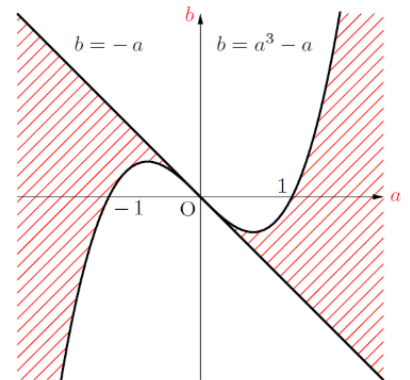
39. $-1 < k < 0 \rightarrow 3, k = -1, 0 \rightarrow 2, k < -1, k > 0 \rightarrow 1$

40. 右上図

41. $(a, b) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{9}, -\frac{2\sqrt{6}}{9}\right), \left(-\frac{2\sqrt{6}}{9}, \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

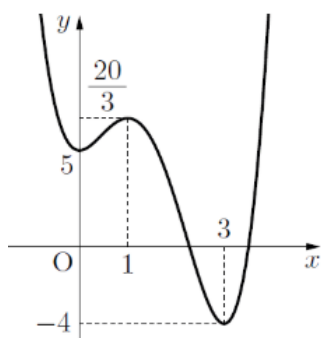
42. (1) 略 (2) 略

43. 略

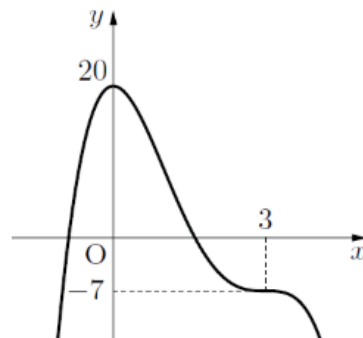


44. $\frac{2}{7} < a < \frac{3+\sqrt{11}}{2}$

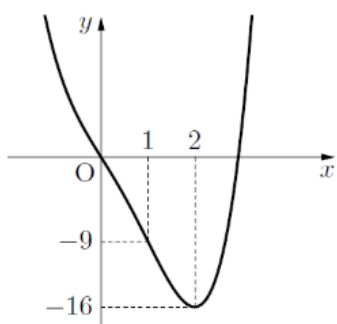
45. (1)



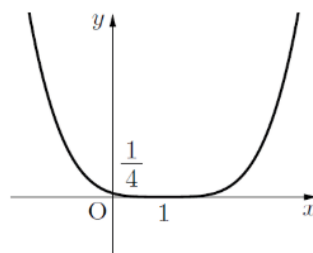
(2)



(3)



(4)



46. (1) $-3 < a < 0, 0 < a < \frac{3}{7}$ (2) $a > \frac{1}{2}$

47. $y = -12x - 36$

48. (1) 略 (2) $\theta = \frac{1}{9}\pi, \frac{5}{9}\pi, \frac{7}{9}\pi$ (3) 略 (4) $\frac{1}{8}$