No10 整式の積分

1. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (5x^3 - 4x^2 + 6x - 8)dx$

(2) $\int (x^2 - 3x)dx + 2\int (x^2 + 2)dx$

(3) $\int (3x - 1)(2x + 5)dx$

(4) $\int (tx^2 + t^2x - 2t^2)dt$

(5) $\int (x - 1)^2 dx$

(6) $\int (2x + 1)^4 dx$

(7) $\int (x^2 + 1)^2 dx$

2. 曲線 $y = f(x)$ は点$(1\,,4)$ を通り、曲線の任意の点$(x\,,y)$ における接線の傾きが $2x^2 - x + 3$ であるとする。この線の方程式を求めよ。

3. 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_1^5 (2x^2 - 5x + 8)dx$

(2) $\int_{-1}^2 (t + 3)(t - 1)dt$

(3) $2\int_{-3}^1 (x^4 + x)dx - \int_{-3}^1 (2x^4 + 3x^3)dx$

(4) $\int_0^2 (4x - 1)dx + \int_2^3 (4x - 1)dx$

(5) $\int_1^3 (x^2 + 2)dx - \int_2^3 (x^2 + 2)dx$

(6) $\int_{-1}^0 (x - 1)^2 dx - \int_2^0 (x - 1)^2 dx$

(7) $\int_{-1}^1 (2x^3 - 3x^2 - 5x + 7)dx$

4. (1) $f(x) = x + \int_0^2 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x) = 2x + \int_0^1 (x + t)f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

5. $f(x) = 2x + \int_0^1 g(t)dt$, $g(x) = x\int_0^1 f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)\,,g(x)$ を求めよ。

6. 次の式を満たす整式 $f_n(x)$ を求めよ。

$$f_1(x) = 2x + 1\,,f_{n+1}(x) = x^2 + x\int_0^1 f_n(x)\,dx \quad (n = 1\,,2\,,3\,,\cdots)$$

7. (1) $\int_1^x f(t)dt = x^2 + 4x + a$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(2) $f(x) + \int_1^x tf'(t)dt = x^2 + 2x - 1$ を満たす関数$f(x)$ を求めよ。

8. 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$　　(2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)dx$

(3) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2dx$

9. 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2-4\,,x=-1\,,x=3\,,x$軸

(2) $y=-x^3-x^2+2x\,,x$軸

10. $y=2x^2-x-3$ と $y=x+1$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

11. $y=x^2-2$ と $y=-x^2-2x+2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

12. $y=x^3-x$ と $y=x^3-3x^2+2x$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

13. $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$ とその上の点$(3\,,2)$ における接線と y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

14. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$ と $y=\frac{1}{4}x^2-2$ と y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

15. $y=\frac{1}{2}x^2$ とその上の点$(-2\,,2)\,,(4\,,8)$ における 2 本の接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

16. 2 つの放物線　$y=\frac{1}{2}x^2\,,y=\frac{1}{2}x^2-4x+12$　とその共通接線の間の面積 S を求めよ。

17. $y=x^3-2x$ とその上の点$(-1\,,1)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

18. $y=x^4-2x^2+\frac{1}{2}x+3$ とその二重接線で囲まれた面積 S を求めよ。

19. 放物線　$y=\frac{1}{2}x^2$ と y 軸上の点を中心とする半径 2 の円が異なる 2 点で接しているとき、放物線と円で囲まれた部分の面積 S を求めよ。ただし、円の内部の面積は含めない。

20. $a\,,b$ を正の定数とする。放物線 $y=ax^2+b$ 上の任意の点 P における接線 l と放物線 $y=ax^2$ で囲まれた部分の面積を S とするとき、S が点 P の位置によらず一定値をとることを示せ。

21. 点$(1\,,2)$ を通る直線と、放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ で囲まれた部分の面積 S の最小値を求めよ。

22. 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と、その上の点 $\left(a,\frac{1}{2}a^2\right)$ $(a>0)$ における法線とで囲まれた部分の面積 S の最小値を求めよ。

23. 放物線 $y=x^2$ の点$P(a,a^2)$ $(a>0)$ における接線を l_1 とする。また、l_1 に直交し、$y=x^2$ と点Pとは異なる点で接する直線を l_2 とする。放物線と l_1, l_2 で囲まれた部分の面積 S の最小値を求めよ。

24. $y=-x^2+2x$ と x 軸で囲まれた面積が $y=ax$ $(0<a<2)$ によって 2 等分されるとき、定数 a の値を求めよ。

25. 放物線 $y=|x^2-2x|$ と $y=ax$ $(0<a<2)$ で囲まれてできる 2 つの部分の面積が等しくなるとき、定数 a の値を求めよ。

26. (1) 3 次関数 $y=x^3-6x^2+9x$ と直線 $y=mx$ が $x\geqq 0$ において異なる 3 点で交わるような m の値の範囲を求めよ。

(2) (1)のとき、3 次関数と直線で囲まれてできる 2 つの部分の面積を等しくするような定数 m の値を求めよ。

27. 曲線 $y=|x^2-2x|$ と $y=ax$ $(0<a<2)$ とで囲まれてできる 2 つの部分の面積の和 S を最小とするような定数 a の値を求めよ。

28. 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2|x-1|dx$　　　(2) $\displaystyle\int_0^3|x^2-3x+2|dx$

29. 関数 $f(x)=\int_0^1|t^2-xt|dt$ の最小値を求めよ。

30. $f(x)=\int_0^x|t^2-4t+3|dt$ $(x\geqq 0)$ とするとき、$y=f(x)$ のグラフを描け。

31. $f(x)=\int_x^{x+1}|t^2-2t|dt$ $(x\geqq 0)$ とするとき、$y=f(x)$ のグラフを描け。

解答

1． (1) $\frac{5}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x^2 - 8x + C$　(2) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$　(3) $2x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 5x + C$

(4) $\frac{x-2}{3}t^3 + \frac{x^2}{2}t^2 + C$　(5) $\frac{1}{3}(x-1)^3 + C$　(6) $\frac{1}{10}(2x+1)^5 + C$　(7) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C$

2． $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{6}$

3． (1) $\frac{164}{3}$　(2) -3　(3) 52　(4) 15　(5) $\frac{13}{3}$　(6) 3　(7) 12

4． (1) $f(x) = x - 2$　(2) $f(x) = -12x - 8$

5． $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 2x$

6． $f_n(x) = \begin{cases} 2x + 1 & (n = 1) \\ x^2 + \left\{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{2}{3}\right\}x & (n \geqq 2) \end{cases}$

7． (1) $f(x) = 2x + 4$, $a = -5$　(2) $f(x) = 2x$

8． (1) $-\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$　(2) $-\frac{1}{12}(\beta - \alpha)^4$　(3) $\frac{1}{30}(\beta - \alpha)^5$

9． (1) $\frac{34}{3}$　(2) $\frac{37}{12}$　10.　9　11.　9　12.　$\frac{1}{2}$　13.　$\frac{9}{2}$　14.　$\frac{16}{3}$

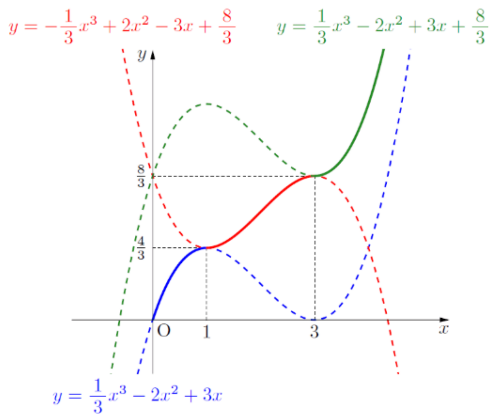
15.　9　16.　$\frac{8}{3}$　17.　$\frac{27}{4}$　18.　$\frac{16}{15}$　19.　$3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$　20. 略

21.　$2\sqrt{3}$　22.　$\frac{16}{3}$　23.　$\frac{1}{12}$　24. $a = 2 - \sqrt[3]{4}$　25. $a = 2\sqrt[3]{2} - 2$

26. (1) $0 < m < 9$　(2) $m = 1$　27. $a = 6 - 4\sqrt{2}$　28. (1) 1　(2) $\frac{11}{6}$

29. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき、最小値 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$

30.



31.