No2 数列の極限と関数の極限

1. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2n^3-3n^2)$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n+2}{3n^2+2}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{2n^2+1}{n-3}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n+1)(4-2n)$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)}$

2. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\sqrt{n^2+2n}}$　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(n-\sqrt[3]{n^3+1}\right)$　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{2n}}$

3. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2+5+8+\cdots+(3n-1)}{n^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ （福岡大）

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log_3(1^2+2^2+\cdots+n^2)-\log_3 n^3\}$ （東京電機大）

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$ （小樽商科大）

(5) $a_n=1+2+3+\cdots+n$ とするとき

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1\times\frac{1}{a_2}\right)\times\left(a_3\times\frac{1}{a_4}\right)\times\cdots\times\left(a_{2n-1}\times\frac{1}{a_{2n}}\right)$$

（関西医科大）

4. (1) 数列$\{a_n\}$が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4n-3)a_n=2$ を満たすとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4}{2a_n+1}=1$ を満たすとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

5. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(an+b-\sqrt{n^2-4n}\right)=3$ のとき、定数 a , b の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{an+b-\sqrt{2n^2+3n}}=1$ のとき、定数 a , b の値を求めよ。

6. 次の極限を求めよ。ただし、$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n}{4}\pi$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n-\cos n\pi}{3n+\cos n\pi}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{sin^2 n\theta}{n^2+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{2n}$　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n+\sin\frac{n}{3}\pi\right)$

7. 自然数 n に対して、3^n の桁数を k_n で表すとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}$を求めよ。（慶応大）

8. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

9. (1) $h>0$ のとき、$(1+h)^n \geqq 1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2$ であることを示せ。

(2) $r>1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ であることを示せ。

(3) $0<r<1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$ であることを示せ。

(4) $r>1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{r^n}=0$ であることを示せ。

(5) $r>1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{r^n}=0$ であることを示せ。

(6) $0<r<1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n=0$ であることを示せ。

(7) $r>0$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n!}=0$ であることを示せ。

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ を求めよ。

10. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{5^n-(-2)^n\}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{4^n+5^n}$　　(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}-3^{n+1}}{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n-1}}$

11. 次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-2^n}{r^n+3^n}\ \ (r\neq-3)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n+1}-1}{r^{2n}+1}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}\ \ (r\neq 0)$　　(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{cos^n\theta-sin^n\theta}{cos^n\theta+sin^n\theta}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

12. $a>0$, $b>0$ とするとき、次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}$

13. 次の無限等比数列が収束するような x の範囲を求めよ。そのときの極限値も求めよ。

(1) $\left\{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n\right\}$　　(2) $\{x(x^2-x-1)^{n-1}\}$　　(3) $\left\{\left(\frac{x+4}{2x-1}\right)^n\right\}$

14. 漸化式 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2$ で定義される数列$\{a_n\}$の極限を求めよ。

15. 漸化式 $a_1=k$, $a_{n+1}=pa_n+q$ で定義される数列$\{a_n\}$が収束するための条件を求めよ。また、そのときの極限値を求めよ。

16. 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$が漸化式 $a_1=1$, $b_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+6b_n$, $b_{n+1}=2a_n+3b_n$ で定義されるとき、$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

17. 数列$\{a_n\}$が漸化式 $a_1=1$, $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$ で定義されるとき、$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

18. 数列$\{a_n\}$が漸化式 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{5a_n}{3a_n+4}$ で定義されるとき、$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

19. 数列$\{a_n\}$が漸化式 $a_1=4$, $a_{n+1}=\frac{3a_n-4}{a_n-1}$ で定義されるとき、$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

20. 数列$\{a_n\}$が漸化式 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{3a_n+6}{a_n+4}$ で定義されるとき、$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

21. (1) 数列$\{a_n\}$が漸化式 $a_1=4$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$ で定義されるとき、$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$が漸化式 $a_1=4$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n+3}$ で定義されるとき、$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

22. 数列$\{a_n\}$を $a_1 = a\ (0 < a < 1)$, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n^3 + \frac{3}{2}a_n$ によって定義する。

(1) すべての自然数 n について $0 < a_n < 1$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 n について $a_n < a_{n+1}$ であることを示せ。

(3) $1 - a_{n+1} \leqq r(1 - a_n)$ を満たす n と無関係な定数 $r\ (0 < r < 1)$ があることを示せ。

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

23. $y = x^2 - 2$ 上の点$(a_n, a_n^2 - 2)$における接線が x 軸と交わる点を$(a_{n+1}, 0)$ とする。このようにして、順に$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を求める。ただし、$a_1 > \sqrt{2}$とする。

(1) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(2) $\sqrt{2} < a_{n+1} < a_n$ であることを示せ。

(3) $a_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(a_n - \sqrt{2}\right)^2$ であることを示せ。

以下、$a_1 = 1.5$ とする。

(4) $\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ.

(5) $a_4 - \sqrt{2} < \frac{1}{2^7 \cdot 10^8}$ を示せ。

24. 自然数 n に対して、a_n, b_n を$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ を満たす自然数として定める。

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。

(2) $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_n^2 - b_n^2$ の値を求めよ。

(4) $\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \sqrt{2}\right| < r\left|\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2}\right|$ $(0 < r < 1)$ を満たす定数 r があることを示せ。

(5) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

25. 次の無限級数の収束・発散を調べ、収束するものはその和を求めよ。

(1) $\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) + \cdots$

(2) $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} + \cdots$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n - 3}$

(4) $\frac{1}{1^3} + \frac{1+2}{1^3 + 2^3} + \frac{1+2+3}{1^3 + 2^3 + 3^3} + \cdots$

26. 次の無限級数の収束・発散を調べ、収束するものはその和を求めよ。

(1) $\log_2\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots$

(2) $\frac{1}{(2^2-1)^2}+\frac{2}{(4^2-1)^2}+\frac{3}{(6^2-1)^2}+\cdots$

(3) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots$

(4) $\frac{6}{1\cdot2\cdot4}+\frac{6}{2\cdot3\cdot5}+\frac{6}{3\cdot4\cdot6}+\cdots$

(5) $\frac{4}{1\cdot2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{2\cdot3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{6}{3\cdot4}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots$

(6) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots$

27. 次の無限級数が発散することを示せ。

(1) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\cdots$

(2) $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\cdots$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

28. 次の無限級数の収束・発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。a は定数とする。

(1) $3-3+3-3+\cdots$

(2) $\frac{5}{6}+\frac{5}{3}+\frac{10}{9}+\frac{20}{27}+\cdots$

(3) $\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-2\sqrt{2}\right)+\left(13\sqrt{2}-17\right)+\cdots$

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{3^n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\sin\frac{n\pi}{2}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a(a^2)^{n-1}$

29. 等比数列$\{a_n\}$が $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{3}{2}$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{9}{2}$ を満たすとき、$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$ を求めよ。

30. 次の無限級数の収束・発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

(1) $\left(\frac{2}{3}-2\right)+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{2}{3^3}-\frac{8}{5^2}\right)+\left(\frac{2}{3^4}+\frac{16}{5^3}\right)+\cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cos n\pi-2^{\frac{n-2}{2}}}{2^{2n}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{4^n}$

31. 初項 1 の 2 つの無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ がともに収束し、$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{8}{3}$ および $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{4}{5}$ が成り立つ。このとき、$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ を求めよ。 （長崎大）

32. 次の循環小数を整数または分数に直せ。

(1) $0.\dot{9}$　　　(2) $3.\dot{2}9\dot{7}$　　　(3) $1.6\dot{9}5\dot{4}$

33. 1 辺の長さが a の正三角形を F_1 とし、多角形 F_n ($n = 1, 2, \cdots$)を次のように作る。

(ア) F_n の 1 辺を 3 等分し、3 つの線分に分ける。

(イ) (ア)でできた 3 つの線分のうらの中央の線分にその線分を 1 辺とする正三角形を F_n の外側に追加する。

(ウ) すべての辺に対して(ア)と(イ)を行って得られる多角形を F_{n+1} とする。

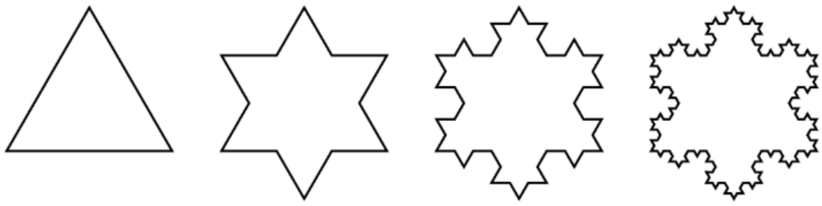
多角形 F_n の 1 辺の長さを l_n , 辺の個数を K_n , 周の長さを L_n , 面積を S_n とする。

(1) l_n を求めよ。

(2) K_n を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty} L_n$ を求めよ。

(4) $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。



F_1　　F_2　　F_3　　F_4

34. (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ となることを示せ。

(2) 無限級数$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \cdots$ の和を求めよ。

35. (1) $|r| < 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ となることを示せ。

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ の収束と発散を調べ、収束する場合はその和を求めよ。

36. 次の無限級数の収束・発散を調べ、収束するときはその和を求めよ。

(1) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots$

(2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots$

(3) $\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{5} - \frac{6}{7}\right) + \left(\frac{6}{7} - \frac{8}{9}\right) + \cdots$

(4) $1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} - \frac{6}{7} + \frac{6}{7} - \frac{8}{9} + \cdots$

37. 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{2n\pi}{3}$ の収束と発散を調べ、収束する場合はその和を求めよ。

38. 次の無限級数の収束・発散を調べよ。ただし、上に有界な単調増加数列は収束することを用いてよい。

(1) $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{4^3}+\dfrac{1}{5^3}+\cdots$

(3) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\cdots$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cdots$

(5) $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}+\dfrac{1}{5!}+\cdots$

39. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^3-8}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^3+x^2-14x+6}{x^2-9}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2+x-2}-\frac{1}{2x^2-x-1}\right)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(x+5)(2x-3)(3-x)1}{x^3+2x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(3x^3+2x^2)$

40. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+1}{2x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^2+x\sqrt{x^2-2})$

41. 次の極限を調べよ。ただし、$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{x+1}{(x-2)^2}$ ， $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{x+1}{(x-2)^2}$ ， $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{(x-2)^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{(x-1)^3}$ ， $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{(x-1)^3}$ ， $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{x^2+x}{[x]}$ ， $\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{x^2+x}{[x]}$ ， $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{[x]}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}[x]$ ， $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}[x]$ ， $\displaystyle\lim_{x\to 1}[x]$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}([2x]-[x])$ ， $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}([2x]-[x])$ ，$\displaystyle\lim_{x\to 1}([2x]-[x])$

42. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{5^x-3^x}{5^x+3^x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x-2^{2x+1})$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{1}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\right\}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{a^{-x}}{2a^x+3a^{-x}}\quad(a>0)$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_a\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\quad(a>0\,,a\neq1)$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+2^x)^{\frac{1}{x}}$

43. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

44. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x^\circ}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+\sin 4x}{2x+\sin x}$

45. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x^\circ}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+\sin 4x}{2x+\sin x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}$

46. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)^2}{1-\sin x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2\cos x)}{2x-\pi}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\tan x$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{4}}\frac{\tan\pi x-1}{4x-1}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\sin\frac{1}{2x}$

47. 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}xsin^2\frac{1}{x}$

48. (1) $\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1}=2$ が成り立つとき、定数 a , b の値を求めよ。

(2) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x-\pi)}{ax-b}=1$ が成り立つとき、定数 a , b の値を求めよ。

(3) $\lim_{x\to-\infty}\left\{\sqrt{x^2-2x-4}-(ax+b)\right\}=0$ が成り立つとき、定数 a , b の値を求めよ。

49. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=3$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=4$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

50. $0<x<\pi$ とする。

(1) $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}=\frac{\sin x}{8\sin\frac{x}{8}}$ を証明せよ。

(2) 次のように定義される数列$\{a_n\}$の極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を x を用いて表せ。

$$a_1=1\,,a_n=a_{n-1}\cos\frac{x}{2^n}\ \ (n=2\,,3\,,\cdots)$$

(3) 数列$\{b_n\}$, $\{c_n\}$を次のように定義する。

$$b_1=\sqrt{\frac{1}{2}}\,,b_n=\sqrt{\frac{1+b_{n-1}}{2}}\ \ (n=2\,,3\,,\cdots)$$

$$c_1=\sqrt{\frac{1}{2}}\,,c_n=c_{n-1}b_n\ \ (n=2\,,3\,,\cdots)$$

このとき、$\lim_{n\to\infty}c_n$ を求めよ。

（東京医科歯科大）

51. 半径 1 の円に内接する正 2^n 角形 (n≧ 2) の面積を S_n とする。

(1) $S_n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$ を示せ。

(2) $\frac{S_n}{S_{n+1}}=\cos\frac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty}S_n$, $\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}\right)$ を求めよ。

（金沢大）

52. 次の関数の連続性を調べよ。ただし、$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{|x|} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

(3) $f(x)=[x] \quad (-1\leqq x\leqq 1)$

53. 収束するような x の範囲で、次の関数のグラフを書き、連続性を調べよ。

(1) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$

(2) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x}{(1+x)^n}$

54. 次の関数がすべての実数 x で連続となるように定数 a, b の値を求めよ。

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax-2}{x-1} & (x\neq 1)\\ b+1 & (x=1)\end{cases}$

(2) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx+1}{x^{2n}+1}$

55. 方程式 $3^x=5x-1$ が $0<x<1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

56. 次の極限を求めよ。ただし、$f(x)$ は微分可能な関数とする。

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

(2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{\tan x}$

(3) $\lim_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin(x-a)}$

(4) $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\log\dfrac{x}{2}$

57. 次の極限値を a , $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ を用いて表せ。$f(x)$ は微分可能な関数とする。

(1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(a+2x)-f(a-3x)}{x}$

(2) $\lim_{x\to a}\dfrac{x^3f(a)-a^3f(x)}{x-a}$

(3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-f(2x)}{x}$

58. 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^x$

(3) $\lim_{x\to\infty}x\{\log(x-2)-\log x\}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$

59. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x e^t\cos t\ dt$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}\int_2^x t\log t\ dt$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_1^{x^2}\frac{t^2e^t}{x-1}\,dt$

60. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{4n^2-k^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\frac{3}{n^2+3^2}+\cdots+\frac{3n}{n^2+(3n)^2}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{{}_{2n}\mathrm{P}_n}$　　(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{{}_{3n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\right)^{\frac{1}{n}}$

61. 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x+\sin x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 2x}{x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}$　　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(2x+3)}{\log(3x+1)}$　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^2\log x$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$