

No1 数列

1. (1) 等差数列 $52, 49, 46, 43, \dots$ の一般項を求めよ。
(2) $a_2 = 5, a_5 = 11$ である等差数列 $\{a_n\}$ について、次を求めよ。
(ア) 一般項 (イ) 89 は第何項か。 (ウ) a_n が初めて 500 を超える最小の自然数 n
(3) 一般項が $a_n = 3n - 2, b_n = 5n + 3$ である数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対し、 $c_n = a_{3n} - b_{2n}$ で表される数列 $\{c_n\}$ が等差数列であることを示し、初項と公差を求めよ。
2. 等差数列をなす 3 数があり、その和が 45、積が 3240 である。この 3 数を求めよ。
3. 数列 a, b, b^2, a^2 がこの順で等差数列をなすとき、実数 a, b の組をすべて求めよ。
4. (1) 調和数列 $24, 12, 8, 6, \dots$ の一般項 a_n を求めよ。
(2) 調和数列 $2, x, y, -\frac{5}{2}, \dots$ の一般項 a_n と x, y の値を求めよ。
5. 次の等差数列の和 S を求めよ。
(1) 等差数列 $-4, -1, 2, \dots, 101$ の和
(2) 第 30 項が 58、公差 -4 の等差数列の第 50 項から第 80 項までの和
6. 100 から 200 までの整数のうち、3 の倍数または 4 の倍数の和を求めよ。
7. (1) 初項 200、公差 -6 の等差数列の和 S_n の最大値を求めよ。
(2) 初項 -300 、公差 5 の等差数列の和 S_n の最小値を求めよ。
8. 一般項が $a_n = 3n - 2, b_n = 4n - 1$ である 2 つの等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の共通項を小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。
9. 2 と 9 の間にあって、5 を分母とする既約分数の和 S を求めよ。
10. p は素数、 m, n は正の整数で $m < n$ とする。 m と n の間にあって、 p を分母とする既約分数の総和 S を求めよ。
(同志社大)
11. (1) 50 を 2 個以上の連続する自然数の和で表す表し方をすべて求めよ。
(2) 2^k (k : 自然数) は 2 個以上の連続する自然数の和で表せないことを示せ。

12. 第4項が18, 第6項が162である等比数列の一般項 a_n を求めよ。ただし、公比は実数とする。

13. 等比数列をなす3数があり、その和が24, 積が -4096 である。この3数を求めよ。

14. 異なる3つの数 $6, x, 2x-6$ がある順序で等比数列になっている。このとき、 x の値を求めよ。

(関西大)

15. (1) 等比数列 $3, 6, 12, \dots, 3072$ の和 S を求めよ。また、各項の逆数の和 T を求めよ。

(2) 等比数列 $a, 2ar, 4ar^2, \dots$ の初項から第 $n+1$ 項までの和 S を求めよ。

16. 一般項が $a_n = 3n - 2, b_n = 4n - 1$ である2つの等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の共通項を小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

17. 3数 p, q, pq ($p < 0 < q$) は、適当に並べると等差数列になり、また、適当に並べると等比数列にもなる。このとき、 p, q の値を求めよ。

18. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を $a_n = 2^n, b_n = 3n + 2$ とする。 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の共通項を小さい順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

19. 年利率が10%の1年ごとの複利法による預金を考える。

(1) 100万円を預金したとき、4年後の元利合計を求めよ。

(2) 毎年の初めに10万円ずつ預金するとき、 n 年後に預金した時点での元利合計 S_n を求めよ。

(3) 100万円を預金したときの n 年後の元利合計を T_n とする。 S_n が T_n より大きくなる最小の n を求めよ。ただし、 $\log_{10} 1.1 = 0.0414$ とする。

(立教大).

20. 年利10%の複利で100万円を借り、毎年の年末に一額を返済していくとする。10年で返済し終わるために必要な毎年の返済額を求めよ。ただし、 $1.1^{10} = 2.6$ とする。

21. 次の和を Σ を用いて表せ。

(1) $2^2 + 5^2 + 8^2 + \dots + (3n - 2)^2$

(2) $1 \cdot 3 + 5 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3^5 + \dots + 29 \cdot 3^{15}$

(3) $\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{(n-1) \cdot n}$

(4) $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + n \cdot 1$

22. 次の和を求めよ。

(1) $\sum_{k=1}^{n-2} k \quad (n \geq 3)$

(2) $\sum_{k=0}^n (k+1)$

(3) $\sum_{k=4}^n k \quad (n \geq 4)$

(4) $\sum_{k=1}^n 2^{k-1}$

23. 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $2 \cdot 1, 3 \cdot 3, 4 \cdot 5, \dots$

(2) $1 \cdot 3^2, 2 \cdot 5^2, 3 \cdot 7^2, \dots$

24. 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $1 \cdot n, 2 \cdot (n-1), 3 \cdot (n-2), \dots$

(2) $1, 1+5, 1+5+9, \dots$

(3) $1, 1+2, 1+2+2^2, \dots$

(4) $1^2, 1^2+2^2, 1^2+2^2+3^2, \dots$

25. 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$5, 7, 10, 16, 27, 45, 72, 110, \dots$

26. 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n = n^2 - 3n - 1$

(2) $S_n = 2^n - 1$

(3) $S_n = \frac{1}{n^2}$

27. (1) 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$\frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \dots$

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+2k}$ を求めよ。

(3) 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}, \dots$

28. (1) 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$\frac{3}{(1 \cdot 2)^2}, \frac{5}{(2 \cdot 3)^2}, \frac{7}{(3 \cdot 4)^2}, \dots$

(2) 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$\frac{1^2}{1 \cdot 3}, \frac{2^2}{3 \cdot 5}, \frac{3^2}{5 \cdot 7}, \dots$

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k(1-2k)}{k(k+1)}$ を求めよ。

29. 次の和を求めよ。

(1) $S_{62} = \sum_{k=1}^{62} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{15} \log_2 \frac{k}{k+1}$

(3) $S_n = \sum_{k=1}^n k \cdot k!$

(4) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$

30. (1) 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

$$1 \cdot 1, 5 \cdot 3, 9 \cdot 3^2, 13 \cdot 3^2, \dots$$

(2) $S_n = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$ を求めよ。

31. $S = \sum_{k=1}^n k^2 2^k$ を求めよ。

32. 初項 38, 公差 -4 の等差数列を $\{a_n\}$ とするとき、 $\sum_{k=1}^{20} |a_k|$ を求めよ。

33. $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2$ を求めよ。

34. $n \geq 2$ とする。 n 個の自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ の中から、異なる 2 個の自然数を取り出して作った積の総和 S を求めよ。

35. 奇数列を $1 | 3, 5 | 7, 9, 11 | 13, \dots$ のような群に分ける。

(1) 第 20 群の 10 番目の項を求めよ。

(2) 819 は第何群の何番目の数か。

(3) 第 n 群に含まれる数の総和 S を求めよ。

36. 既約分数の数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ がある。

(1) $\frac{57}{512}$ は最初から何番目の項か。

(2) 最初から 1000 番目の項は何か。

(3) 初項から第 1000 項までの和 S を求めよ。

(岩手大)

37. x を超えない最大の整数を $[x]$ と表す。

数列 $\{a_n\}$ が $a_n = [\sqrt{n}]$ で定められるとき、 $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$ を求めよ。

38. n を自然数とする。次の条件を満たす整数解の組数を求めよ。

$$x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 2n$$

39. n を自然数とする。 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq n$ を満たす整数解の組数を求めよ。

解答

1. (1) $a_n = -3n + 55$ (2) (ア) $a_n = 2n + 1$ (イ) 第44項 (ウ) 250 (3) $c_1 = -6, d = -1$

2. 12, 15, 18

3. $(a, b) = (0, 0), (1, 1), \left(\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}\right)$

4. (1) $a_n = \frac{24}{n}$ (2) $a_n = -\frac{10}{3n-8}$ $x = 5, y = 10$

5. (1) 1746 (2) -2542

6. 7650

7. (1) 3434 (2) -9150

8. $c_n = 12n - 5$

9. 154

10. $\frac{1}{2}(m+n)(n-m)(p-1)$

11. (1) $11 + 12 + 13 + 14, 8 + 9 + 10 + 11 + 12$ (2) $n(2m+n-1) = 2^{k+1}$ より

12. $a_n = 2 \cdot 3^{n-2}, a_n = 2 \cdot (-3)^{n-2}$

13. 8, -16, 32

14. $x = -3, \frac{3}{2}$

15. (1) $\frac{2047}{3072}$ (2) $r = \frac{1}{2}$ のとき $S = (1+n)a$ $r \neq \frac{1}{2}$ のとき $S = \frac{a\{(2r)^{n+1}-1\}}{2r-1}$

16. (1) 28 (2) 32

17. $(p, q) = (-2, 4), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

18. $c_n = 2^{2n+1}$

19. (1) 1464100 円 (2) $100\{(1.1)^{n+1} - 1\}$ 万円 (3) 25

20. 16 万 2500 円

21. (1) $\sum_{k=1}^n (3k-1)^2$ (2) $\sum_{k=1}^8 (4k-3) \cdot 3^{2k-1}$ (3) $\sum_{k=1}^{n-2} \frac{2}{(k+1)(k+2)}$ (4) $\sum_{k=1}^n k(n-k+1)$

22. (1) $\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$ (2) $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ (3) $\frac{1}{2}(n-3)(n+4)$ (4) $2^n - 1$

23. (1) $\frac{1}{6}n(4n^2+9n-1)$ (2) $\frac{1}{6}n(n+1)(6n^2+14n+7)$

24. (1) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ (2) $\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$ (3) $2^{n+1} - n - 2$ (4) $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$

25. $a_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{25}{6}n + 2$

26. (1) $a_1 = -2, a_n = 4n - 5 (n \geq 2)$ (2) $a_n = 2^{n-1}$ (3) $a_1 = 1, a_n = \frac{1-2n}{n^2(n-1)^2} (n \geq 2)$

27. (1) $\frac{n}{3(2n+3)}$ (2) $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$ (3) $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

28. (1) $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ (2) $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ (3) $\frac{2(n+1-2^n)}{n+1}$

$$29. (1) -\sqrt{2}+8 \quad (2) -4 \quad (3) (n+1)!-1 \quad (4) 1-\frac{1}{(n+1)!}$$

$$30. (1) S = \frac{5+3^n(4n-5)}{2} \quad (2) x \neq 1 \text{ のとき } S = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}, \quad x=1 \text{ のとき } S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$31. S = (n^2 - 2n + 3)2^{n+1} - 6$$

$$32. 400$$

$$33. S_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$34. \frac{1}{24} n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

$$35. (1) 399 \quad (2) \text{第 29 群の 4 番目} \quad (3) S = n^3$$

$$36. (1) 284 \text{ 番目} \quad (2) \frac{977}{1024} \quad (3) \frac{500753}{1024}$$

$$37. 625$$

$$38. (n+1)^2$$

$$39. \frac{1}{6} n(n+1)(n+2)(n+3)$$