No3 数学的帰納法

1. n を自然数とするとき、次の等式を数学的帰納法によって証明せよ。

$$1\cdot 1+4\cdot 2+7\cdot 2^2+\cdots+(3n-2)\cdot 2^{n-1}=(3n-5)2^n+5$$

2. 正の整数 n に対し、$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p}$ ，$T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$ とおく。等式 $S(n)=T(n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ が成り立つことを、数学的帰納法を用いて示せ。

3. n を 5 以上の自然数とするとき、$n^2<2^n<n!$ を証明せよ。

4. n を 2 以上の自然数とするとき、$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$ が成立することを証明せよ。

5. 整数 $a_n=19^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^{4n-3}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めよ。

6. 数列$\{a_n\}$は、$a_1=7$, $a_{n+1}=(a_n)^3$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定められるとする。n を自然数とするとき、a_n を 3^n で割ったときの余りが 1 になることを数学的帰納法によって証明せよ。（神戸大）

7. 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$は、$a_1=b_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{1-{b_n}^2}$ ，$b_{n+1}=a_{n+1}b_n$ を満たしている。a_n , b_n を表す n の式を推定し、それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

8. a , b を正の整数とする。2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ の 2 つの実数解を α , β とするとき、すべての自然数 n について、$\alpha^n+\beta^n$ が整数となることを示せ。

9. $x=t+\frac{1}{t}$, $P_n=t^n+\frac{1}{t^n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき、P_n は x の n 次式になることを示せ。（香川大）

10. 正の項からなる数列$\{a_n\}$が、全ての自然数 n に対して次の等式を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2={a_1}^3+{a_2}^3+{a_3}^3+\cdots+{a_n}^3$$