No3　順列組合せ・確率

１．易（やや）　次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

(i) X が 4 の倍数ならば、点 P は x 軸方向に-1 動く。
(ii) X を 4 で割った余りが 1 ならば、点 P は y 軸方向に-1 動く。
(iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば、点 P は x 軸方向に$+1$ 動く。
(iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば、点 P は y 軸方向に$+1$ 動く。
例えば、2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから、点 P は x 軸方向に$+1$ 動く。

　以下のいずれの問題でも、点 P は原点$(0,0)$を出発点とする。
(1) 2 個のサイコロを 1 回投げて、点 P が$(1,0)$にある確率を求めよ。
(2) 2 個のサイコロを 1 回投げて、点 P が $(0,1)$にある確率を求めよ。
(3) 2 個のサイコロを 3 回投げて、点 P が$(2,1)$にある確率を求めよ。

（2013　北海道大・文理）

２．易（やや）　A , B の 2 人が、サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし、その時点でゲームを終了する。 A から投げ始めるものとし、以下の問いに答えよ。
(1) B がちょうど 1 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。
(2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。
(3) B がちょうど 2 回投げて、その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

（2013　東北大・文理）

３．難（やや）　A , B の 2 人がいる。投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインが 1 枚あり、最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。
(i) A がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば A に 1 点を与え、コインは A がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、A はコインを B に渡す。
(ii) B がコインを持っているときは、コインを投げ、表が出れば B に 1 点を与え、コインは B がそのまま持つ。裏が出れば、両者に点を与えず、B はコインを A に渡す。そして A , B のいずれかが 2 点を獲得した時点で、2 点を獲得した方の勝利とする。例えば、コインが表, 裏, 表, 表と出た場合、この時点で A は 1 点, B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

(1) A , B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$を求めよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

（2013 東京大・理）

４．易（やや）　3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すも のとする。負けた人は脱落し、残った人で次回のジャンケンを行い（アイコのときは誰も脱落しない）、勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め、ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n , 3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1 , q_1 を求めよ。

(2) p_n , q_n が満たす漸化式を導き、p_n , q_n の一般項を求めよ。

(3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

（2013 名古屋大・文理）

５．標準　投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き、この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し、裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1) 石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき、石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2) 石が原点にあるとする。n を自然数とし、$2n$ 回硬貨を投げたとき、石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ。

（2013 京都大・理）

６．難　n を 3 以上の整数とする。n 個の球 $K_1 , K_2 , \cdots , K_n$ と n 個の空(から)の箱 $H_1 , H_2 , \cdots , H_n$ がある。以下のように、$K_1 , K_2 , \cdots , K_n$ の順番に、球を箱に 1 つずつ入れていく。

　まず、球 K_1 を箱 $H_1 , H_2 , \cdots , H_n$ のどれか 1 つに無作為に入れる。次に、球 K_2 を、箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ、箱 H_2 が空でなければ残りの $n-1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。一般に、$i = 2 , 3 , \cdots , n$ について、球 K_i を、箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ、箱 H_i が空でなければ残りの $n-i+1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

(1) K_n が入る箱は H_1 または H_n である。これを証明せよ。

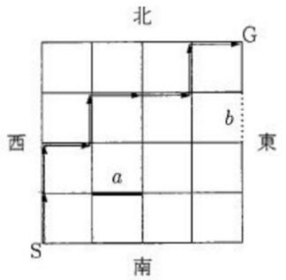
(2) K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ。

（2013 大阪大・理）

７．標準　横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して、以下の操作 L と操作 R を考える。
L: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。
R: さいころを投げて、出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。
例えば、表表裏表裏表と並んだ状態で操作 L を行うときに、3 の目が出た場合は、裏裏表表裏表となる。
以下、「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。
(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき、表が 1 枚となる確率を求めよ。
(2) 最初の状態から L , R の順に操作を行うとき、表の枚数の期待値を求めよ。
(3) 最初の状態から L , R , L の順に操作を行うとき、すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

（2013 九州大・文理）

８．標準　図のような格子状の道路がある。S 地点を出発して、東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分, 点線で描かれた区間 b を通り抜けるの 8 分, それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。例えば、図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1) a を通り抜ける経路は何通りあるか。
(2) a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。
(3) すべての経路から任意に 1 つ選んだとき、S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。

（2014 北海道大・文理）

９．標準　1 , 2 , 3 , 4 , 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ、合計 10 個ある。
(1) 10 個の玉を袋に入れ、よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。
(2) 10 個の玉を袋に入れ、よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。
(3) 10 個の玉を袋に入れ、よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と、4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。

（2014 東北大・文理）

10. **標準**　a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。
白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して、次の操作（＊）を考える。
（＊）袋 U から球を 1 個取り出し、
(i) 取り出した球が白球のときは、袋 U の中身が白球 a 個, 赤球 1 個となるようにする。
(ii) 取り出した球が赤球のときは、その球を袋 U へ戻すことなく、袋 U の中身はそのままにする。
　はじめに袋 U の中に、白球が $a+2$ 個, 赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作（＊）を繰り返し行う。 例えば、1 回目の操作で白球が出たとすると、袋 U の中身は白球 a 個, 赤球 1 個となり、さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると、U の中身は白球 a 個のみとなる。 n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし、袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。
(1) p_1 , p_2 を求めよ。
(2) $n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。
(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。

（2014 東京大・文理）

11. **易**（やや）　大小合わせて 2 個のサイコロがある。サイコロを投げると、1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。
(1) 2 個のサイコロを同時に投げる。出た目の差の絶対値について、その期待値を求めよ。
(2) 2 個のサイコロを同時に投げ、出た目が異なるときはそこで終了する。出た目が同じときには小さいサイコロをもう一度だけ投げて終了する。終了時に出ている目の差の絶対値について、その期待値を求めよ。

（2014 名古屋大・文）

12. **標準**　2 つの粒子が時刻 0 において△ABC の頂点 A に位置している。これらの粒子は独立に運動し、それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。例えば、ある時刻で点 C にいる粒子は、その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。この 2 つの粒子が、時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ。

（2014 京都大・理）

13. **易**（やや）　さいころを繰り返し投げ、n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2 \cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし、余りが 2 , 3 , 4 のいずれかである確率を q_n とする。

(1) p_n+q_n を求めよ。
(2) p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3) $r_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより、p_n を n の式で表せ。

（2014 大阪大・理）

14. 標準　ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える。
(1) 番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。
(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い、4 枚連続しては並ばない確率を求めよ。

（2015 北海道大・文）

15. 標準　初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。
(i) まず同時に 2 個の玉を取り出す。
(ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し、色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる。
(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ、1 回の試行を終える。n 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を X_n とする。
(1) $X_1=3$ となる確率を求めよ。
(2) $X_2=3$ となる確率を求めよ。
(3) $X_2=3$ であったとき、$X_1=3$ である条件付き確率を求めよ。

（2015 北海道大・理）

16. 易（やや）　サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし、x の 2 次方程式

$$2p_1x^2+p_2x+2p_3=0 \quad \cdots\cdots（*）$$

を考える。
(1) 方程式（*）が実数解をもつ確率を求めよ。
(2) 方程式（*）が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち、かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。
(3) 方程式（*）が実数でない 2 つの複素数解 α, β をもち、かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ。

（2015 東北大・理）

17. 標準　どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し、次のように左から順に文字を書く。　さいころを投げ、出た目が 1 , 2 , 3 のときは文字列 AA を書き、4 のと

きは文字 B を、5 のときは文字 C を、6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ、同じ規則に従って AA , B , C , D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。 例えば、さいころを 5 回投げ、その出た目が順に 2 , 5 , 6 , 3 , 4 であったとすると、得られる文字列は、AACDAAB となる。このとき、左から 4 番目の文字は D , 5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ、文字列を作るとき、文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で、かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

（2015 東京大・文理）

18. 標準 数直線上にある 1 , 2 , 3 , 4 , 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき、

・石が点 1 にあるならば、確率 1 で点 2 に移動する。

・石が点 k ($k=2,3,4$)にあるならば、確率 $\frac{1}{2}$ で点 $k-1$ に、確率 $\frac{1}{2}$ で点 $k+1$ に移動する。

・石が点 5 にあるならば、確率 1 で点 4 に移動する。

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め、この試行を繰り返す。また、石が移動した先の点に印をつけていく（点 1 には初めから印がついているものとする）。このとき、次の問に答えよ。

(1) 試行を 6 回繰り返した後に、石が点 k ($k=1,2,3,4,5$)にある確率をそれぞれ求めよ。

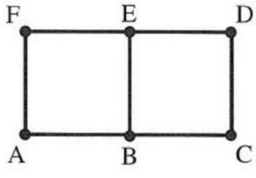
(2) 試行を 6 回繰り返した後に、5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回 ($n \geqq 1$) 繰り返した後に、ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。

（2015 名古屋大・文理）

19. 易（やや） 6 個の点 A , B , C , D , E , F が下図のように長さ 1 の線分で結ばれているとする。各線分をそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{2}$ で赤または黒で塗る。赤く塗られた線分だけを通って点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする。そのような経路がない場合は X を 0 とする。このとき、$n=0,2,4$ について、$\mathrm{X}=n$ となる確率を求めよ。

（2015 京都大・文）



20. **難**　2つの関数を$f_0(x)=\dfrac{x}{2}, f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$から始め、各$n=1, 2, \cdots$について、それぞれ確率$\dfrac{1}{2}$で$x_n=f_0(x_{n-1})$ または$x_n=f_1(x_{n-1})$と定める。このとき、$x_n<\dfrac{2}{3}$となる確率P_nを求めよ

（2015 京都大・理）

21. **易**　袋の中に最初に赤玉2個と青玉1個が入っている。次の操作を繰り返し行う。
（操作）袋から1個の玉を取り出し、それが赤玉ならば代わりに青玉1個を袋に入れ、青玉ならば代わりに赤玉1個を袋に入れる。袋に入っている3個の玉がすべて青玉になるとき、硬貨を1枚もらう。
(1) 2回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。
(2) 奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。
(3) 8回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。
(4) 8回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど1枚である確率を求めよ。

（2015 九州大・理）

22. **標準**　机の引き出しAに3枚のメダル, 引き出しBに2枚のメダルが入っている。引き出しAの各メダルの色は金, 銀, 銅のどれかであり、引き出しBの各メダルの色は金, 銀のどちらかである。
(1) 引き出しAのメダルの色が2種類である確率を求めよ。
(2) 引き出しA, Bをあわせたメダルの色が2種類である確率を求めよ。
(3) 引き出しA, Bをあわせてちょうど3枚の金メダルが入っていることがわかっているとき、引き出しAのメダルの色が2種類である確率を求めよ。

（2016 北海道大・理）

23. **易**（やや）　サイコロを3回振って出た目の数をそれぞれ順にa, b, cとする。以下の問いに答えよ。
(1) a, b, cがある直角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ。
(2) a, b, cがある鈍角三角形の3辺の長さとなる確率を求めよ。

（2016 東北大・理）

24. **標準**　A, B, C の3つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い、2連勝したチームが出た時点で、そのチームを優勝チームとして大会は終了する。
(a) 1試合目でAとBが対戦する。
(b) 2試合目で、1試合目の勝者と、1試合目で待機していたCが対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は、k 試合目の勝者と、k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。
ここで k は 2 以上の整数とする。 なお、すべての対戦において、それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で、引き分けはないものとする。

(1) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。
(2) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき、A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

（2016 東京大・文理）

25. **難**(やや) n を正の整数とし、k を $1 \leqq k \leqq n+2$ を満たす整数とする。$n+2$ 枚のカードがあり、そのうちの 1 枚には数字 0 が、他の 1 枚には数字 2 が、残りの n 枚には数字 1 が書かれている。この $n+2$ 枚のカードのうちから無作為に k 枚のカードを取り出すとする。 このとき、次の問に答えよ。
(1) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 1 以上になる確率を求めよ。
(2) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 2 となる確率 $Q_n(k)$を求めよ。
(3) 与えられた n に対して、確率 $Q_n(k)$が最大となる k の値と、その最大値を求めよ。

（2016 名古屋大・文）

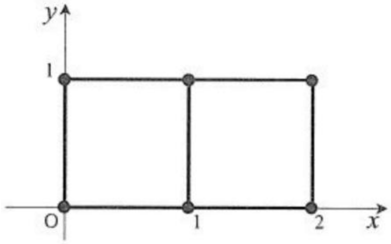
26. **標準** 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A , B があるとき、袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ、次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる。という操作を 1 回の操作と数 えることにする。A に赤玉が 2 個, B に白玉が 2 個入った状態から始め、この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ ($n=1,2,3,\cdots$)とする。このとき、次の問に答えよ。
(1) $k=0,1,2$ に対する $P_1(k)$を求めよ。
(2) $k=0,1,2$ に対する $P_n(k)$を求めよ。

（2016 名古屋大・理）

27. **標準** xy 平面上の 6 個の点$(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(2,1)$が図のように長 さ 1 の線分で結ばれている。動点 X は、これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する。
規則 : 動点 X は、そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに、等しい確率で移動する。例えば、X が$(2,0)$にいるときは、$(1,0)$, $(2,1)$のいずれかに $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。また X が$(1,1)$にいるときは、$(0,1)$,

$(1,0),(2,1)$のいずれかに$\frac{1}{3}$の確率で移動する。

時刻 0 で動点 X が O = (0 , 0)から出発するとき、n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ。ただし n は 0 以上の整数とする。



（2016 京都大・理）

28. 標準 1 以上 6 以下の 2 つの整数 a , b に対し、関数 $f_n(x)$ ($n = 1 , 2 , 3 , \cdots$)を次の条件（ア）,（イ）,（ウ）で定める。

（ア）$f_1(x) = \sin(\pi x)$

（イ）$f_{2n}(x) = f_{2n-1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-x\right)$ ($n = 1 , 2 , 3 , \cdots$)

（ウ）$f_{2n+1}(x) = f_{2n}(-x)$ ($n = 1 , 2 , 3 , \cdots$)

以下の問いに答えよ。

(1) $a = 2$, $b = 3$ のとき、$f_5(0)$を求めよ。

(2) $a = 1$, $b = 6$ のとき、$\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ。

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて、1 回目に出る目を a , 2 回目に出る目を b とするとき、$f_6(0) = 0$ となる確率を求めよ。

（2016 大阪大・理）

29. 難(やや) 袋の中に、赤玉が 15 個, 青玉が 10 個, 白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し、取り出した玉の色に応じて、以下の操作で座標平面に置いたコインを動かす ことを考える。

（操作）コインが点(x , y)にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点$(x+1 , y)$に移動, 青玉を取り出したときには点$(x , y+1)$に移動, 白玉を取り出したときには点$(x-1 , y-1)$に移動し、取り出した球は袋に戻す。

最初に原点(0 , 0)にコインを置き、この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後、コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 操作を n 回繰り返したとき、白玉を 1 度だけ取り出したとする。このとき、到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2) 操作を n 回繰り返したとき、到達点となり得る点の個数を求めよ。
(3) 座標平面上の 4 点$(1,1),(-1,1),(-1,-1),(1,-1)$を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき、到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。
(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ

（2016 九州大・文）

30. 易 座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で、点 $P_0(1,0)$を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し、1 つのサイコロを 1 回投げ、出た目に応じてコインを次の規則に従って頂点上を動かす。
（規則）
(i) 1 から 5 までの目が出た場合は、出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。例えば、コインが P_4 にあるときに 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。
(ii) 6 の目が出た場合は、x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし、コインが x 軸上にあるときは動かさない。例えば、コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。
　はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き、1 つのサイコロを続けて何回か投げて、1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。
(1) 2 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。
(2) 3 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。
(3) n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に、コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

（2016 九州大・理）

31. 標準 正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある。点 P は、1 秒ごとに、隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{a}{3}$ で移るか、もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる。初め頂点 A にいた点 P が、n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする。ただし、$0<a<1$ とし、n は自然数とする。
(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。
(2) 確率 p_n を求めよ。

（2017 北海道大・文）

32. 標準 さいころを続けて投げて、数直線上の点 P を移動させるゲームを行う。初め点 P は原点 0 にいる。さいころを投げるたびに、出た目の数だけ、点 P を現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い、点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする。

(1) $p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ。

(2) p_9 の値を求めよ。

(3) p_3 の値を求めよ。

（2017 北海道大・理）

33. **易**（やや） A 君と B 君はそれぞれ、0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は、自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし、0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して、しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの、A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。

（2017 東北大・理）

34. **標準** 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則 (a) , (b)に従って動く点 P を考える。

(a) 最初に、点 P は原点 O にある。

(b) ある時刻で点 P が格子点(m, n)にあるとき、その 1 秒後の点 P の位置は、隣接する格子点$(m+1, n)$, $(m, n+1)$, $(m-1, n)$, $(m, n-1)$のいずれかであり、また、これらの点に移動する確率は、それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 最初から 1 秒後の点 P の座標を(s, t)とする。$t-s=-1$ となる確率を求めよ。

(2) 点 P が、最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

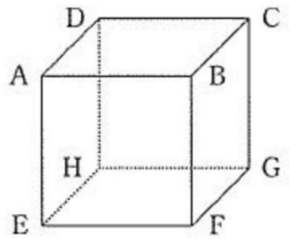
（2017 東京大・文理）

35. **難**（やや） 下図のような立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は、今いる頂点と 辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると、時刻 $n+1$ では、それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D , E , G のいずれかにいる。

自然数 $n \geqq 1$ に対して、

(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 B , D , E のいず

れかにいる確率を p_n ,
(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 C , F , H のいずれかにいる確率を q_n ,
(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n ,
とする。このとき、次の問に答えよ。
(1) p_2 , q_2 , r_2 と p_3 , q_3 , r_3 を求めよ。
(2) n≧2 のとき、p_n , q_n , r_n を求めよ。
(3) 自然数 m≧1 に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。(4) 自然数 m≧2 に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき、$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。



（2017 名古屋大・理）

36. 標準　n を自然数とする。n 個の箱すべてに、1 , 2 , 3 , 4 , 5 の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し、取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る。このとき、X が 3 で割り切れる確率を求めよ。

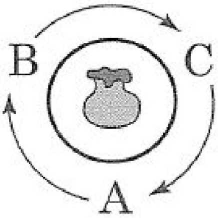
（2017 京都大・理）

37. 標準　A と B の 2 人が A , B , A , B , … の順にさいころを投げ、先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め、さいころ投げを終える。以下では、さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$, $\log_{10} 3 = 0.477$ として、以下の問いに答えよ。
(1) さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n ($n = 1 , 2 , \cdots$)を求めよ。さらに、p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。
(2) さいころを投げた回数が 3 以下で A が勝つ確率を求めよ。
(3) 自然数 k に対し、さいころを投げた回数が $2k + 1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

（2017 九州大・文）

38. 標準　赤玉 2 個, 青玉 1 個, 白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルの周りに A , B , C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち、ひとりが袋から玉を 1 個取り出し、色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を

取り出し、次のルール(a) , (b) , (c)に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。
(a) 赤玉を取り出したら、取り出した人を勝者とする。
(b) 青玉を取り出したら、次の回も同じ人が玉を取り出す。
(c) 白玉を取り出したら、取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。
A , B , C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n , b_n , c_n ($n = 1 , 2 , \cdots$)とする。ただし、$a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。
(1) A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。
(2) $d_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1 , 2 , \cdots$)とおくとき、d_n を求めよ。
(3) 自然数 $n \geqq 3$ に対し、a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。



（2017 九州大・理）

39. 難(やや) 赤色, 青色, 黄色のサイコロが 1 つずつある。この 3 つのサイコロを同時に投げる。赤色, 青色, 黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R , B , Y とし、自然数 s , t , u を $s = 100R + 10B + Y$, $t = 100B + 10Y + R$, $u = 100Y + 10R + B$ で定める。
(1) s , t , u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ。
(2) $s > t > u$ となる確率を求めよ。

（2018 北海道大・文）

40. 難(やや) 数字の 2 が書かれたカードが 2 枚, 同様に、数字の 0 , 1 , 8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚, あわせて 8 枚のカードがある。これらから 4 枚を取り出し、横一列に並べてできる自然数を n とする。ただし、0 のカードが左から 1 枚または 2 枚現れる場合は, n は 3 桁または 2 桁の自然数とそれぞれ考える。例えば、左から順に 0 , 0 , 1 , 1 の数字のカードが並ぶ場合の n は 11 である。
(1) a , b , c , d は整数とする。$1000a + 100b + 10c + d$ が 9 の倍数になることと $a + b + c + d$ が 9 の倍数になることは同値であることを示せ。
(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ。
(3) n が偶数であったとき、n が 9 の倍数である確率を求めよ。

（2018 北海道大・理）

41. 標準 n を 2 以上，a を 1 以上の整数とする。箱の中に、1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ、合計 n 枚入っている。この箱から、1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す、という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$とする。

(1) $p(1)$と $p(n)$を求めよ。

(2) $p(2)$を求めよ。

(3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$を求めよ。

（2018 東北大・理）

42. やや難 図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P , Q が 6 個の頂点 A , B , C , D , E , F を以下の規則(a) , (b)に従って移動する。

(a) 時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に、点 Q は頂点 C にいる。

(b) 点 P , Q は時刻が 1 増えるごとに独立に、今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

時刻 n まで 2 点 P , Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n まで 2 点 P , Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく、かつ時刻 n に 2 点 P , Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し、$b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき、次の問に答えよ。

(1) 時刻 1 での点 P , Q の可能な配置を、図 2 にならってすべて図示せよ。

(2) a_1 , b_1 , a_2 , b_2 を求めよ。

(3) a_{n+1} , b_{n+1} を a_n , b_n で表せ。

(4) $p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。

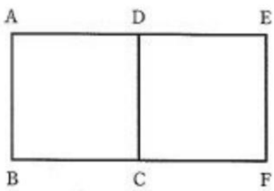


図 1

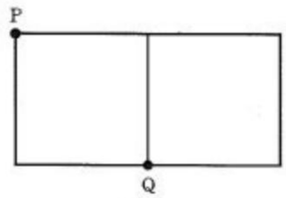


図 2

（2018 名古屋大・文理）

43. やや難 整数が書かれている球がいくつか入っている袋に対して、次の一連の操作を考える。 ただし各球に書かれている整数は 1 つのみとする。

(i) 袋から無作為に球を 1 個取り出し、その球に書かれている整数を k とする.

(ii) $k \neq 0$ の場合、整数 k が書かれた球を 1 個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。

(iii) $k=0$ の場合、袋の中にあった球に書かれていた数の最大値より 1 大きい整数が書かれた球を 1 個新たに用意し、取り出した球とともに袋に戻す。

整数 0 が書かれている球が 1 個入っており他の球が入っていない袋を用意する。この袋に上の一連の操作を繰り返し n 回行った後に、袋の中にある球に書かれている $n+1$ 個の数の合計を X_n とする。例えば X_1 は常に 1 である。以下 $n≧2$ として次の問に答えよ。

(1) $\mathrm{X}_n \geqq \dfrac{(n+2)(n-1)}{2}$ である確率を求めよ。

(2) $\mathrm{X}_n \leqq n+1$ である確率を求めよ。

（2018 京都大・文）

44. 標準　コインを n 回投げて複素数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を次のように定める。

(i) 1 回目に表が出れば $z_1=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とし、裏が出れば $z_1=1$ とする。

(ii) $k=2, 3, \cdots, n$ のとき、k 回目に表が出れば $z_k=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}z_{k-1}$ とし、裏が出れば $z_k=\overline{z_{k-1}}$ とする。ただし、$\overline{z_{k-1}}$ は z_{k-1} の共役複素数である。

このとき、$z_n=1$ となる確率を求めよ。

（2018 京都大・理）

45. 標準　1 個のさいころを 3 回投げる試行において、1 回目に出る目を a , 2 回目に出る目を b , 3 回目に出る目を c とする。

(1) $\int_a^c (x-a)(x-b)\,dx=0$ である確率を求めよ。

(2) a , b が 2 以上かつ $2\log_a b-2\log_a c+\log_b c=1$ である確率を求めよ。

（2018 大阪大・文）

46. 難　p, q を $0<p<1, 0<q<1$ を満たす実数とし、n を 2 以上の整数とする。2 つのチーム A , B が野球の試合を n 回行う。1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする。また、A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり、B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする。なお、試合結果に引き分けはなく、勝敗が決まるとする。

(1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2) $n≧3$ とする。B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。

（2018 大阪大・理）

47. 標準　3 つの部品 a , b , c からなる製品が多数入った箱がある。製品を 1 つ取り出したとき、部品 a , b , c が不良品である確率について次のことがわかっている。

- 部品 a が不良品である確率は p である。
- 部品 a が不良品でないとき、部品 b が不良品である確率は q である。
- 部品 a が不良品であるとき、部品 b も不良品である確率は $3q$ である。
- 部品 b が不良品でないとき、部品 c が不良品である確率は r である。
- 部品 b が不良品であるとき、部品 c も不良品である確率は $5r$ である。

ただし、$0 < p < 1 , 0 < q < \frac{1}{3}, 0 < r < \frac{1}{5}$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 製品を 1 つ取り出したとき、部品 a , b の少なくとも一方が不良品である確率を p , q を用いて表せ。
(2) 製品を 1 つ取り出したとき、部品 c が不良品である確率を p , q , r を用いて表せ。
(3) 製品を 1 つ取り出したところ部品 c が不良品であった。このとき、部品 b も不良品である確率を p , q を用いて表せ。

（2018 九州大・文）

48. 標準　1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を **n** 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし、積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0 , 1 , 2 , 3 である確率をそれぞれ p_n , q_n , r_n , s_n とする。p_n , q_n , r_n , s_n を求めよ。

（2018 九州大・理）

49. 標準　n を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり、どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。 A と B の 2 人のうち、A は箱 X から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し、もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし、もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば、その札を箱 Y に戻し、再び箱 Y から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を B の得点とする。
(1) m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。
(2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。

（2019 北海道大・理）

50. 難　n を 2 以上の整数とする。金貨と銀貨を含む n 枚の硬貨を同時に投げ、裏が出た金貨は取り去り、取り去った金貨と同じ枚数の銀貨を加えるという試行の繰り返しを考え る。初めは n 枚すべてが金貨であり、n 枚すべてが銀貨になった後も試行を繰り返す。k 回目の試行の直後に、n 枚の硬貨のなかに金貨が j 枚だけ残る確率を $P_k(j)$ $(0 \leqq j \leqq n)$ で表す。
(1) $P_1(j)$を求めよ。

(2) $P_k(j)$ ($k \geqq 2$)を求めよ。
(3) $n=3$ とする。2 回目の試行の直後では金貨が少なくとも 1 枚残るが、3 回目の試行の直後には 3 枚すべてが銀貨になる確率を求めよ。

（2019 東北大・文）

51. 標準 10 個の玉が入っている袋から 1 個の玉を無作為に取り出し、新たに白玉 1 個を袋に入れるという試行を繰り返す。初めに、袋には赤玉 5 個と白玉 5 個が入っているとする。 この試行を m 回繰り返したとき、取り出した赤玉が全部で k 個である確率を $p(m, k)$ とする。2 以上の整数 n に対して、以下の問いに答えよ。
(1) $p(n+1, 2)$を $p(n, 2)$と $p(n, 1)$を用いて表せ。
(2) $p(n, 1)$を求めよ。
(3) $p(n, 2)$を求めよ。

（2019 東北大・理）

52. やや難 正八角形の頂点を反時計回りに A , B , C , D , E , F , G , H とする。また、投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある。点 P が最初に点 A にある。次の操作を 10 回繰り返す。
操作：コインを投げ、表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ、裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる。
例えば，点 P が点 H にある状態で、投げたコインの表が出れば点 A に移動させ、裏が出れば点 G に移動させる。
以下の事象を考える。
事象 S：操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある。
事象 T：1 回目から 10 回目の操作によって、点 P は少なくとも 1 回、点 F に移動する。
(1) 事象 S が起こる確率を求めよ。
(2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ。

（2019 東京大・文）

53. やや難 1 つのサイコロを 3 回投げる。1 回目に出る目を a , 2 回目に出る目を b , 3 回目に出る目を c とする。なお、サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。
(1) 2 次方程式 $x^2-bx+c=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ。
(2) 2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ のすべての解が整数である確率を求めよ。
(3) 2 次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつ確率を求めよ。

（2019 名古屋大・文）

54.　難　正の整数 n に対して $1,2,\cdots,n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$とする。この$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$に対し、各添字 $i=1,2,\cdots,n$ について、a_iの値が j であるとき、その j を添字にもつ a_jの値が k であることを $a_i=j\to a_j=k$ と書くことにする。ここで $a_i=j\to a_j=k\to a_k=l\to\ \cdots$ のようにたどり、それを続けていく。例えば$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)=(2,5,6,1,4,3,7)$ のとき、

(i) $a_1=2\to a_2=5\to a_5=4\to a_4=1\to a_1=2$

(ii) $a_3=6\to a_6=3\to a_3=6$

(iii) $a_7=7\to a_7=7$

となり、どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の(i) , (ii) , (iii)は長さがそれぞれ 4 , 2 , 1 のサイクルになっている。

(1) $n=3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2) $n=4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3) n 以下の正の整数 k に対して $\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}>\log(n+1)-\log k$ を示せ。

(4) n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は $p>\log 2$ をみたすことを示せ。

（2019　名古屋大・理）

55.　難（やや）　1 つのさいころを n 回続けて投げ、出た目を順に $X_1,X_2,\cdots,X_n$ とする。このとき次の条件をみたす確率を n を用いて表せ。ただし $X_0=0$ としておく。

条件：　$1\leqq k\leqq n$ をみたす k のうち、$X_{k-1}\leqq 4$ かつ $X_k\geqq 5$ が成立するような k の値はただ 1 つである。

（2019　京都大・文理）

56.　標準　自然数 a,b に対し、$w=\cos\dfrac{a\pi}{3+b}+i\sin\dfrac{a\pi}{3+b}$ とおく。ただし、i は虚数単位とする。複素数 z_n（$n=1,2,3,\cdots$）を以下のように定める。

$$z_1=1,\ z_2=1-w,\ z_n=(1-w)z_{n-1}+wz_{n-2}\quad(n=3,4,5,\cdots)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1) $a=4,b=3$ のとき、複素数平面上の点 $z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6,z_7$ をこの順に線分で結んでできる図形を図示せよ。

(2) $a=2,b=1$ のとき、z_{63} を求めよ。

(3) さいころを 2 回投げ、1 回目に出た目を a , 2 回目に出た目を b とする。このとき $z_{63}=0$ である確率を求めよ。

（2019　大阪大・理）

57. **標準**　表に 3 , 裏に 8 が書かれた硬貨がある。この硬貨を 10 回投げるとき、出た数字 10 個の積が 8 桁になる確率を求めよ。ただし、$\log_{10}2 = 0.3010$, $\log_{10}3 = 0.4771$ とする。

（2019 九州大・文）

58. **標準**　1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に a , b , c とする。2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの解 z_1 , z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$とする。また、複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。

(2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。

(3) P_1 と O を通る直線を l_1 とし、P_2 と O を通る直線を l_2 とする。l_1 と l_2 のなす鋭角が 60°である確率を求めよ。

（2019 九州大・理）

59. **難**（やや）　n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする。

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

(3) $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

（2020 北海道大・理）

60. **標準**　6 枚の硬貨を同時に投げて、表がでた硬貨が s 枚 , 裏がでた硬貨が t 枚であったとき、ベクトル $\vec{p} = (x, y)$ を $\vec{p} = s(2, -1) + t(-1, 2)$ で定める。

(1) $x + y$ の値を求めよ。

(2) $\vec{p} = (0, 6)$ となる確率を求めよ。

(3) $\vec{p}$ と $\vec{q} = (3, 1)$ のなす角が $\dfrac{\pi}{6}$ 以下となる確率を求めよ。

（2020 東北大・文）

61. **易**（やや）　白玉 3 個, 赤玉 2 個の合計 5 個の玉が入った箱と硬貨がある。箱から無作為に玉を 1 個取り出し、硬貨を投げて表が出たら、その玉を手元に残し、裏が出たら箱に戻す試行を行う。試行後に箱の中の玉がなくなったら試行は停止する。また、最初手元に玉はないものとする。

(1) 2 回の試行の結果、手元に白玉が 2 個ある確率を求めよ。

(2) 3 回の試行の結果、手元の玉が白玉 1 個 ，赤玉 1 個の計 2 個となる確率を求めよ。
(3) n を 5 以上の整数とし、ちょうど n 回目で試行が停止する確率 p_n を求めよ。
(4) (3)の確率 p_n が最大となる n を求めよ。

（2020 東北大・理）

62. 難（やや） 座標平面上に 8 本の直線 $x=a\ (a=1,2,3,4)$, $y=b\ (b=1,2,3,4)$ がある。以下、16 個の点 $(a,b)\ (a=1,2,3,4,\ b=1,2,3,4)$ から異なる 5 個の点を選ぶことを考える。

(1) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。
　上の 8 本の直線のうち、選んだ点を 1 個も含まないものがちょうど 2 本ある。
(2) 次の条件を満たす 5 個の点の選び方は何通りあるか。
　上の 8 本の直線は、いずれも選んだ点を少なくとも 1 個含む。

（2020 東京大・文）

63. 難 2 名が先攻と後攻にわかれ、次のようなゲームを行う。
(i) 正方形の 4 つの頂点を反時計回りに A , B , C , D とする。両者はコマを 1 つずつ持ち、ゲーム開始時には先攻の持ちゴマは A, 後攻の持ちゴマは C に置いてあるとする。
(ii) 先攻から始めて、交互にサイコロを振る。ただしサイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。出た目を 3 で割った余りが 0 のときコマは動かさない。 また余りが 1 のときは、自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし、余りが 2 のときは、自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす。もし移動した先に相手のコマがあれば、その時点でゲームは終了とし、サイコロを振った者の勝ちとする。 ちょうど n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率を p_n とする。このとき、以下の問に答えよ。

(1) p_2 , p_3 を求めよ。
(2) p_n を求めよ。
(3) このゲームは後攻にとって有利であること、すなわち 2 以上の任意の整数 N に対して $\displaystyle\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$ が成り立つことを示せ。ただし正の実数 a に対し $[\,a\,]$ は、その整数部分($k \leqq a < k+1$ となる整数 k)を表す。

（2020 名古屋大・理）

64. 難（やや） 縦 4 個 ，横 4 個のマス目のそれぞれに 1 , 2 , 3 , 4 の数字を入れていく。このマス目の横の並びを行といい、縦の並びを列という。どの行にも、どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ。下図はこのような入れ方の 1 例である。

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

（2020 京都大・文理）

65. **標準**　円周を 3 等分する点を時計回りに A , B , C とおく。点 Q は A から出発し、A , B ， C を以下のように移動する。1 個のさいころを投げて、1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し、2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し、その他の目が出た場合は移動しない。さいころを n 回投げたあとに Q が A に位置する確率を p_n とする。以下の問いに答えよ.

(1) p_2 を求めよ.

(2) p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3) p_n を求めよ。

（2020 大阪大・文）

66. **易**（やや）　1 個のさいころを n 回投げて、k 回目に出た目が 1 の場合は $X_k = 1$, 出た目が 2 の場合は $X_k = -1$, その他の目が出た場合は $X_k = 0$ とする。

$$Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3}X_k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}X_k\right)$$

とおき、Y_1 から Y_n までの積 $Y_1Y_2Y_3\cdots Y_n$ を Z_n で表す。ただし、i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) Z_2 が実数でない確率を求めよ。

(2) $Z_1 , Z_2 , Z_3 , \cdots , Z_n$ がいずれも実数でない確率を求めよ。

(3) Z_n が実数となる確率を p_n とする。p_n を n を用いて表し、極限 $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

（2020 大阪大・理）

67. **標準**　4 個のサイコロを同時に投げるとき、出る目すべての積を X とする。以下の問いに答えよ。

(1) X が 25 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 4 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 100 の倍数になる確率を求めよ。

（2020 九州大・文理）

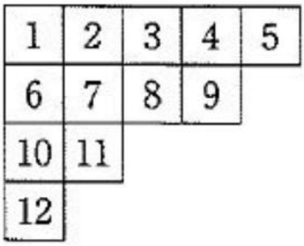
68. **標準**　正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ について、以下の問いに答えよ。
(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形であるものの個数を求めよ。
(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち、直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ。
(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち、次の条件（＊）を満たすものの個数を求めよ。
（＊）四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる。

（2021 東北大・文理）

69. **標準**　N を 5 以上の整数とする。1 以上 2N 以下の整数から、相異なる N 個の整数を選ぶ。ただし 1 は必ず選ぶこととする。選んだ数の集合を S とし、S に関する以下の条件を考える。
条件 1 : S は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない。
条件 2 : S は連続する N − 2 個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む。 ただし、2 以上の整数 k に対して、連続する k 個の整数からなる集合とは、ある整数 l を用いて $\{l, l+1, \cdots, l+k-1\}$ と表される集合を指す。例えば $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ は連続する 3 個の整数からなる集合 $\{1, 2, 3\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{8, 9, 10\}$ を含む。
(1) 条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか。
(2) 条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか。

（2021 東京大・文）

70. **易**（やや）　1 から 12 までの数字が下の図のように並べて書かれている。以下のルール (a) , (b) と（終了条件）を用いたゲームを行う。ゲームを開始すると最初に(a)を行い、（終了条 件）が満たされたならゲームを終了する。そうでなければ（終了条件）が満たされるまで (b)の操作を繰り返す。ただし、(a)と(b)における数字を選ぶ操作はすべて独立な試行とする。
(a) 1 から 12 までの数字のどれか 1 つを等しい確率で選び、下の図において選んだ数字を丸で囲み、その上に石を置く。
(b) 石が置かれた位置の水平右側または垂直下側の位置にある数字のどれか 1 つを等しい確率で選び、その数字を丸で囲み、そこに石を移して置く。例えば、石が 6 の位置に置かれているときは、その水平右側または垂直下側の位置にある数字 7 , 8 , 9 , 10 , 12 のどれか 1 つの数字を等しい確率で選び、その数字を丸で囲み、そこに石を移して置く。
（終了条件） 5 , 9 , 11 , 12 の数字のどれか 1 つが丸で囲まれ石が置かれている。
ゲームの終了時に数字 j が丸で囲まれている確率を p_j とする。以下の問に答えよ。



(1) 確率 p_2 を求めよ。
(2) 確率 p_5 を求めよ。
(3) 確率 p_{11} を求めよ。

（2021 名古屋大・文理）

71. やや難　n を 2 以上の整数とする。1 から n までの番号が付いた n 個の箱があり、それぞれの箱には赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている。このとき操作（∗）を $k=1,\ \cdots,n-1$ に対して、k が小さい方から順に 1 回ずつ行う。
（∗）番号 k の箱から玉を 1 個取り出し、番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる。一連の操作がすべて終了した後、番号 n の箱から玉を 1 個取り出し、番号 1 の箱に入れる。このとき番号 1 の箱に赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている確率を求めよ。

（2021 京都大・文）

72. 標準　赤玉，白玉，青玉，黄玉が 1 個ずつ入った袋がある。よくかきまぜた後に袋から玉を 1 個取り出し、その玉の色を記録してから袋に戻す。この試行を繰り返すとき、n 回目の試行で初めて赤玉が取り出されて 4 種類全ての色が記録済みとなる確率を求めよ。ただし n は 4 以上の整数とする。

（2021 京都大・理）

73. 標準　箱の中に 1 文字ずつ書かれたカードが 10 枚ある。そのうち 5 枚には A，3 枚には B，2 枚には C と書かれている。箱から 1 枚ずつ、3 回カードを取り出す試行を考える。
(1) カードを取り出すごとに箱に戻す場合、1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ。
(2) 取り出したカードを箱に戻さない場合、1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する確率を求めよ。
(3) 取り出したカードを箱に戻さない場合、2 回目に取り出したカードの文字が C であるとき、1 回目と 3 回目に取り出したカードの文字が一致する条件つき確率を求めよ。

（2022 北海道大・文）

74. **標準**　アルファベットのAと書かれた玉が1個, Dと書かれた玉が1個, Hと書かれた玉が1 個, Iと書かれた玉が1個, Kと書かれた玉が2個, Oと書かれた玉が2個ある。これら8個の玉を円形に並べる。
(1) 時計回りにHOKKAIDOと並ぶ確率を求めよ。
(2) 隣り合う子音が存在する確率を求めよ。ここで子音とは、D , H , Kの3文字（玉は4個）のことである。
(3) 隣り合う子音が存在するとき、それがKKだけである条件つき確率を求めよ。

（2022 北海道大・理）

75. **易**（やや）　Kを3より大きな奇数とし、$l+m+n=\mathrm{K}$を満たす正の奇数の組(l , m , n)の個数Nを考える。ただし、例えば、K = 5のとき、$(l, m, n)=(1, 1, 3)$と$(l, m, n)=(1, 3, 1)$とは異なる組とみなす。
(1) K = 99 のとき、Nを求めよ。
(2) K = 99のとき、l, m, nの中に同じ奇数を2つ以上含む組(l, m, n)の個数を求めよ。
(3) N > Kを満たす最小のKを求めよ。

（2022 東北大・文理）

76. **難**（やや）　Oを原点とする座標平面上で考える。0以上の整数kに対して、ベクトル$\overrightarrow{v_k}$を

$$\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{3}, \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも$\frac{1}{2}$の確率で出るコインをN回投げて、座標平面上に点$\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$を以下の規則(i) , (ii)に従って定める。
(i) X_0はOにある。
(ii) nを1以上N以下の整数とする。X_{n-1}が定まったとし、X_nを次のように定める。
● n回目のコイン投げで表が出た場合、$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\overrightarrow{v_k}$により X_nを定める。ただし、kは1回目からn回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。
● n 回目のコイン投げで裏が出た場合、X_nをX_{n-1}と定める。
(1) N = 8とする。X_8がOにある確率を求めよ。
(2) N = 200 とする。X_{200}がOにあり、かつ、合計200回のコイン投げで表がちょうどr回出る確率をp_rとおく。ただし$0 \leqq r \leqq 200$である。p_rを求めよ。またp_rが最大となるrの値を求めよ。

（2022 東京大・理）

77. **難**（やや） 1つのサイコロを3回投げる。1回目に出る目をa, 2回目に出る目をb, 3回目に出る目をcとする。なおサイコロは1から6までの目が等しい確率で出るものとする。

(1) $ab+2c \geqq abc$ となる確率を求めよ。

(2) $ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ。

（2022 名古屋大・文理）

78. **易**（やや） 箱の中に1からnまでの番号がついたn枚の札がある。ただし$n=5$とし、同じ番号の札はないとする。この箱から3枚の札を同時に取り出し、札の番号を小さい順にX, Y, Zとする。このとき、$Y-X \geqq 2$ かつ $Z-Y \geqq 2$ となる確率を求めよ。

（2022 京都大・理）

79. **標準** nを2以上の自然数とし、1個のさいころをn回投げて出る目の数を順に$X_1, X_2, \cdots, X_n$とする。$X_1, X_2, \cdots, X_n$の最小公倍数をL_n, 最大公約数をG_nとするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $L_2=5$ となる確率および $G_2=5$ となる確率を求めよ。

(2) L_nが素数でない確率を求めよ。

(3) G_n が素数でない確率を求めよ。

（2022 大阪大・文）

解答

１．(1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{1}{9}$　(3) $\frac{1}{27}$

２．(1) $\frac{5}{36}$　(2) $\frac{25}{162}$　(3) $\frac{25}{324}$

３．(1) $n=$ 偶数のとき $p(n)=\frac{n}{2^{n+1}}$, $n=$奇数のとき $\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}}$　(2) $\frac{16}{27}$

４．(1) $p_1=q_1=\frac{1}{3}$　(2) $p_n=\frac{n}{3^n}, q_n=\frac{1}{3^n}$　(3) $\frac{2n-1}{3^n}$

５．(1) $\frac{1}{2}$　(2) $\frac{n}{2^{2n-1}}$

６．(1) 背理法で K_n が $H_i\,(2\leqq i\leqq n-1)$として考える。　(2) $\frac{2}{3}$

７．(1) $\frac{1}{18}$　(2) $\frac{19}{9}$　(3) $\frac{5}{108}$

８．(1) 20 通り　(2) 9 通り　(3) 17 分

９．(1) $\frac{4}{45}$　(2) $\frac{1}{42}$　(3) $\frac{2}{75}$

10.　(1) $p_1=\frac{1}{a+3}, p_2=\frac{a+2}{(a+3)(a+1)}$　(2) $p_n=\frac{1}{a+2}\left\{1-\frac{1}{a+3}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}\right\}$　(3) $\frac{1}{a+2}$

11.　(1) $\frac{35}{18}$　(2) $\frac{245}{108}$

12.　$p(n)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{3}$

13.　(1) $\left(\frac{5}{6}\right)^n$　(2) $p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$　(3) $p_n=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

14.　(1) $\frac{1}{5525}$　(2) $\frac{24}{5525}$

15.　(1) $\frac{2}{3}$　(2) $\frac{7}{15}$　(3) $\frac{4}{7}$

16.　(1) $\frac{5}{216}$　(2) $\frac{11}{72}$　(3) $\frac{89}{216}$

17.　(1) $\frac{1}{3}\left\{2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$　(2) $\frac{1}{18}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$

18. (1) $P(2)=P(4)=0$, $P(1)=\dfrac{5}{16}$, $P(3)=\dfrac{1}{2}$, $P(5)=\dfrac{3}{16}$ (2) $\dfrac{1}{4}$ (3) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

19. 順に $\dfrac{7}{16}$, $\dfrac{3}{128}$, $\dfrac{69}{128}$

20. $\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}+\dfrac{2}{3}$

21. (1) $\dfrac{2}{9}$ (2) 略 (3) $\dfrac{686}{6561}$ (4) $\dfrac{2450}{6561}$

22. (1) $\dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{11}{27}$ (3) $\dfrac{18}{25}$

23. (1) $\dfrac{1}{36}$ (2) $\dfrac{13}{72}$

24. (1) $n=3k$ のとき、0 , $n=3k\pm 1$ のとき、$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ (2) $\dfrac{2(8^{m-1}-1)}{10\cdot 8^{m-1}-3}$

25. (1) $\dfrac{n+2-k}{n+2}$ (2) $\dfrac{k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$

(3) $k=\dfrac{n}{2}+1$ のとき、$\dfrac{n+2}{4(n+1)}$, $k=\dfrac{n+1}{2},\dfrac{n+3}{2}$ のとき、$\dfrac{n+3}{4(n+1)}$

26. (1) $P_1(0)=\dfrac{1}{3}$, $P_1(1)=\dfrac{2}{3}$, $P_1(2)=0$

(2) $P_n(0)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right\}$, $P_n(1)=\dfrac{2}{3}$, $P_n(2)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right\}$

27. $\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

28. (1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$ (3) $\dfrac{2}{9}$

29. (1) $(-1, n-2), (0, n-3), \cdots, (n-2, -1)$ (2) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

(3) $\dfrac{25}{72}$ (4) $\dfrac{(19N+6)\cdot(3N)!}{2^{N}3^{N}6^{N+1}N!N!(N+1)!}$

30. (1) $\dfrac{1}{6}$ (2) $\dfrac{1}{6}$ (3) $\dfrac{1}{6}$

31. (1) $p_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{3}a\right)p_n + \frac{a}{3}$　　(2) $p_n = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{4}{3}a\right)^n + \frac{1}{4}$

32. (1) $p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \frac{6}{6}$ より　　(2) $\frac{53}{6^9}$　　(3) $\frac{11}{24}$

33. (1) $\frac{1}{80}$　　(2) $\frac{28}{181}$

34. (1) $\frac{5}{16}$　　(2) $\frac{25}{256}$

35. (1) $p_2 = 0$, $q_2 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 0$, $p_3 = \frac{4}{9}$, $q_3 = 0$, $r_3 = \frac{2}{9}$

(2) $q_n = \begin{cases} 0 & (n:\text{奇数}) \\ \frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1} & (n:\text{偶数}) \end{cases}$,　$p_n = \begin{cases} \frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n:\text{奇数}) \\ 0 & (n:\text{偶数}) \end{cases}$,　$r_n = \begin{cases} \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n:\text{奇数}) \\ 0 & (n:\text{偶数}) \end{cases}$

(3) $s_m = \frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$　　(4) 略

36. $\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{3}$

37. (1) 5　　(2) $\frac{20}{27}$　　(3) $\frac{3}{4}\left\{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}\right\}$

38. (1) $\frac{11}{4096}$　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　(3) $a_{n+1} = \frac{3}{2^{n;3}} - \frac{1}{64}a_{n-2}$

39. (1) $\frac{7}{27}$　　(2) $\frac{35}{216}$

40. (1) 略　　(2) $\frac{9}{70}$　　(3) $\frac{1}{7}$