

◆ 必須

1. 次の各問の 2 つの数はこちらが大きいか。その計算も示せ。

$$(1) \log_5 11, \frac{3}{2} \quad (2) \cos 30^\circ, \cos^2 15^\circ$$

2. 円に内接する四辺形 ABCD において、 $AB = AD = a$ 、 $\angle C = 90^\circ$ 、 $\angle D = 105^\circ$ のとき、対角線 AC および BD の長さを求めよ。

3. $0 < b < 1$ のとき、実係数二次方程式 $x^2 + 2(1 + 2b)x + 2b^2 + ab + 1 = 0$ は実数解をもたないという。定数 a の満足すべき条件を求めよ。

4. 次の実係数連立方程式を解け。

$$ax + by = 1, ay + bz = 1, bx + az = 1$$

5. 2 つの放物線 $y = x^2$ 、 $y = ax^2 + bx + 5$ (a は正の整数) は異なる 2 点で交わり、その 2 交点を結ぶ直線は点 $(-1, 0)$ を通るといふ。 a および b の値を求めよ。

◆ 選択甲

6. 次の無限級数の収束、発散を調べ、収束するものについては和を求め、発散するものについては理由を述べよ。

$$(1) 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \dots$$

$$(2) \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

$$(3) 2 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} + \frac{n+2}{n+1} - \dots$$

$$(4) \left(2 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right) + \dots + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1}\right) + \dots$$

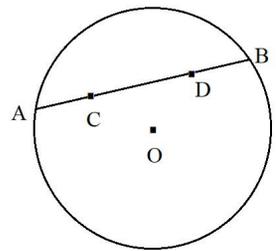
7. 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ の任意の接線が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ $(a, 0)$, $(0,$

$b)$ とするとき、楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ について次の問いに答えよ。

- (1) この楕円は定点 $(3, 2)$ を通ることを証明せよ。
- (2) この楕円を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を a の式で表せ。
- (3) (2)の体積を最小にする a および b の値を求めよ。

◆選択乙

8. 円 O の弦 AB 上に、2 点 C, D が図のように与えられていて、 $AC = BD$ である。劣弧 AB 上に点 P を求め、 C を通る弦 PQ , D を通る弦 PR を作るとき、 $PC = DR$ となるようにしたい。



- (1) P の作図法を述べよ。
- (2) (1)で求めた P が条件に適することを証明せよ。

9. 次の関数の最大値および最小値を求めよ。

- (1) $1 + (\sin x + \cos x)$
- (2) $1 + (\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)^2$
- (3) $1 + (\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x + \cos x)^3$

解答

1. (1) $\frac{3}{2} > \log_5 11$ (2) $\cos 30^\circ < \cos^2 15^\circ$

2. $AC = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a$ $BD = \sqrt{2}a$

3. $a \geq 6$

4. $a+b \neq 0$ のとき、 $x=y=z = \frac{1}{a+b}$, $a+b=0$ のとき、不能

5. $(a, b) = (2, 5)$

6. (1) 1 (2) 1 (3) 発散 (4) 1

7. (1) 接点の座標が $\left(\frac{9}{a}, \frac{4}{b}\right)$ より (2) $V = \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{|a^3|}{a^2-9}$ (ただし、 $|a| > 3$)

(3) $a = \pm 3\sqrt{3}$, $b = \pm\sqrt{6}$

8. 略

9. $(\max, \min) = (1) (\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}+1)$ (2) $\left(\frac{5}{4}, -1-\sqrt{2}\right)$

(3) $\left(\frac{32}{27}, -1-\sqrt{2}\right)$