1963 年

神戸大学　数学入試問題

◆必須

１．$a\,,\,b\,,\,c$ が実数のとき、次の不等式を証明せよ。

(1) $a^2+b^2+c^2 \geqq bc+ca+ab$

(2) $a^4+b^4+c^4 \geqq abc(a+b+c)$

２．△ABC において、$\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$ とする。辺 BC 上に、B , C 以外の 2 点 D , E をとり、$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAE}$, $\mathrm{BD} = \mathrm{CE}$ となるようにすることができるか。

３．α が二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解でないとき、適当な定数 $p\,,\,q\,,\,r$ を選んで、x について恒等式 $p(ax^2+bx+c)+(qx+r)(x-\alpha)=1$ が成り立つようにできる。このことを証明せよ。

４．2 つの正の数 $x\,,\,y$ があって、$2x-y$ の常用対数は 3 である。xy の常用対数が 5 のとき、x および y の常用対数の指標を求めよ。

５．点 $\mathrm{A}(a\,,\,b)$を通る傾き m の直線が、放物線 $y=2x^2$ と交わる点を P , Q とし、PQ の中点を M とする。これについて、次の問に答えよ。

(1) A を固定しておいて、直線の傾き m を変えると、M はある曲線 C の上を動く。この曲線の方程式を求めよ。

(2) A が放物線 $y=x^2+1$ （$|x| \geqq 1$ の部分）の上を動くとき、それに対応する(1)の曲線 C は、一定の直線に接することを示せ。

◆選択甲

６．a を有理数とし、$(1+x^2)^a$ の導関数を $g_a(x)$とする。このとき、次の問に答えよ。

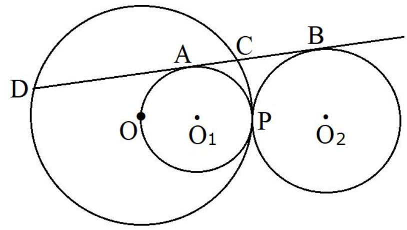
(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} g_a(x)=0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

(2) (1)のような a の値を 1 つ定めたとき、関数 $g_a(x)$の最大値を求めよ。

７．放物線 $y=x^2+ax$ と $x=y^2+by$ とが焦点を共有するとき、これらによって囲まれた部分の面積を求めよ。

◆選択乙

８．円 O の周上の 1 点 P において、これに内接する円を O1, 外接する円を O2 とする。円 O1 , O2 の 1 つの共通外接線の接点をそれぞれ A , B とし、この共通外接線が円 O と交わる点を C , D とするとき、AC：BC＝AD：BD を証明せよ。



９．$ax^2+bxy+cy^2+px+qy+r=0$ は、交角 45°の 2 直線を表しているという。このとき、$ax^2+bx+c=0$ の 2 解が共に整数であるとすれば、その解はいくらになるか。

解答

１．(1) $a^2+b^2+c^2-(bc+ca+ab)=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$ より

(2) (1)の結果を 2 度使って $a^4+b^4+c^4 \geqq b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2 \geqq (bc)(ca)+(ca)(ab)+(ab)(bc)=abc(a+b+c)$

２．できない

３．$ax^2+bx+c=(x-\alpha)((qx+r)+\mathrm{B}$ (B は定数) より

４．どちらも 2

５．(1) $y=4x^2-4ax+b$　　(2) $y=1$ に接する。

６．(1) $a<\frac{1}{2}$　　(2) $\dfrac{2|a|(2-2a)^{a-1}}{(1-2a)^{a-\frac{1}{2}}}$

７．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

８．3 円の共通接線と AB の交点を M とすると、$\mathrm{MP}^2=\mathrm{MC}\cdot\mathrm{MD}$ より

９．(3 , − 2) , (− 1 , 0) , (2 , − 3) , (1 , 0)