1964 年	# 神戸大学　数学入試問題	

◆必須

１．次の問題(1)～(3)の答えだけを書け。

(1) 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} \log xy = -1 \\ (\log xy^3 + \log x^2 - \log y^2)(3 + \log xy^3) = 0 \end{cases}$$

(2) 次の 3 直線の囲む三角形の面積を求めよ。

$$\begin{cases} 3y + 4x = 12 \\ y + 2x = 8 \\ 3y - x = 3 \end{cases}$$

(3) $x = -1 + 2i$ のとき、次の式の値を求めよ。ただし、$i^2 = -1$ とする。

$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 5$

２．三角形 ABC において、$\mathrm{BC} = 2a$,$\angle \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{3}$,$\angle \mathrm{B} = \theta$ とする。この三角形の内心を,

辺 BC の中点を M とするとき、次の問に答えよ。ただし、a は定数, 角の単位はラジアンとする。

(1) 線分 MI の長さを θ の関数として表せ。

(2) この関数の最小値を求めよ。

３．P(a , b)を座標軸上にない 1 点とする。方程式 $\dfrac{x^2}{4-t} + \dfrac{y^2}{1-t} = 1$ において、t に適当な 2 つの値 t_1 , t_2 を与えると、それぞれ点 P を通る楕円および双曲線の方程式が得られることを証明せよ。また、これら 2 曲線の点 P における接線は直交することを証明せよ。

４．四次方程式 $x^4 - 10x^2 + 25 - a = 0$ ($a > 0$) の最大実数解の整数部分が 3 であるように、定数 a の範囲を求めよ。また、このとき、この方程式が 4 実数解をもち、2 番目に大きい解より最大解の小数部分が小さくなるように整数 a の値を求めよ。

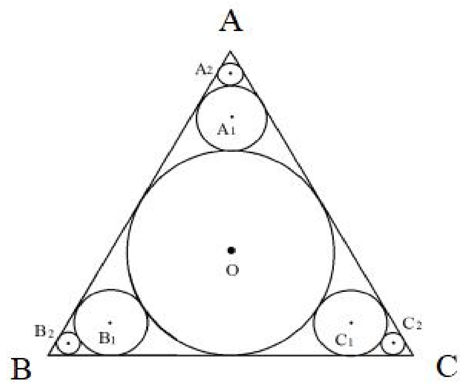
◆選択甲

５．円 $x^2+(y-l)^2=r^2$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積について、次の問に答えよ。

(1) $l \geqq r > 0$ のとき、その体積は $2\pi^2 r^2 l$ であることを示せ。

(2) $l=\dfrac{r}{2}$ のとき、その体積を求めよ。

６．1 辺の長さ a の正三角形 ABC の内接円を円 O とする。次に、図のように、2 辺 AB , AC に接し、円 O に外接する円を A_1 , 円 A_1 に外接する円を A_2 , 以下同様にして、円 A_3 , A_4 , … , A_n , … を作る。また、∠B , ∠C 内にも同様にして円 B_1 , B_2 , … , B_n , … , 円 C_1 , C_2 , … , C_n , …を作る。このとき、次の問に答えよ。



(1) 円 O の半径を r_0 , 円 A_n(または、円 B_n , C_n)の半径を r_n($n=1,2,\cdots$)とするとき、r_0 と r_n を a と n とで表せ。

(2) 円 A_n , B_n , を辺 BC のまわりに 1 回転して出来る 3 つの立体の体積の和 V_n を a と n とで表せ。さらに、円 O を回転して出来る立体の体積 V_0 を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ を計算せよ。

◆選択乙

７．放物線 $y=x^2+px+q$ が直線 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$ と第 1 象限においてだけ交わるとき、この放物線の頂点の存在範囲を図示せよ。

８．次の方程式を解け。ただし、$0 \leqq x \leqq \pi$ とする。

(1) $\sin 3x+\cos 3x=\sin x+\cos x$

(2) $4\sin x\cos^2 x=\sin x+\cos x$

解答

１．(1) $(x, y) = \left(\pm\sqrt{10}, \pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right), \left(\pm 1, \pm\dfrac{1}{10}\right)$ (2) $\dfrac{21}{5}$ (3) 10

２．(1) $\mathrm{MI} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\sqrt{5 - 4\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \theta\right)}$ (2) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

３．$\dfrac{x^2}{4-t} + \dfrac{y^2}{1-t} = 1$ が $\mathrm{P}(a, b)$ を通る条件は $t^2 + (a^2 + b^2 - 5)t + (4 - a^2 - 4b^2) = 0$ で異なる 2 実数解 t_1, t_2 ($t_1 < t_2$)をもつ。そのとき、$t_1 < 1 < t_2 < 4$ だから題意に適する。以下略

４．$16 \leqq a < 121$, $16 \leqq a \leqq 24$ なる整数

５．(1) $V = \int_{-r}^{r} \{(l + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (l - \sqrt{r^2 - x^2})^2\}\, dx$ より (2) $\dfrac{2}{3}\pi^3 r^3 + \dfrac{3}{4}\sqrt{3}\pi r^3$

６．(1) $r_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$, $r_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ (29 $V_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n+1}\pi^2 a^3$, $V_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{36}\pi^2 a^3$

(3) $\dfrac{11\sqrt{3}}{288}\pi^2 a^3$

７．$6x + 9y \leqq 19$, $\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{10}{3}$, $y > -x^2 + 2$, $y > -(x - 3)^2$ を満たす領域

８．(1) $x = 0, \dfrac{\pi}{8}, \pi, \dfrac{5}{8}\pi$ (2) $x = \dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5}{8}\pi$