

◆必須

1. 次の問に答えよ。

- (1) 不等式 $3|x-2| \leq 10-x$ を解け。
 (2) 方程式 $\log_2 x + \log_8 x = 2(\log_2 x)(\log_8 x)$ を解け。

2. 平面上の 2 点 A, B に対し、線分 AB の三等分点のうち A に近い方の点を $A \cdot B$ で表すものとする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) $(A \cdot B) \cdot C$ と $(B \cdot C) \cdot A$ とが一致するとき、 A, B, C はどんな位置関係にあるか。
 (2) $(A \cdot B) \cdot (C \cdot D)$ と $(B \cdot A) \cdot D$ とが一致するとき、 A, B, C, D はどんな位置関係にあるか。

3. 長方形 $ABCD$ において、 $AB = a, BC = 2a$ とする。辺 BC 上に $AB + BP = PD$ となるように点 P をとる。このとき、 $\tan \angle APD$ の値を求めよ。

4. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ において $f(0) > g(0), f(1) < g(1), f(2) > g(2)$ のとき、次の問に答えよ。

- (1) 次の各組(イ~ハ)の 2 数の大小を解答欄の [] (省略) 内に不等号を入れて示せ。またその証明を記せ。

(イ) a と p (ロ) b と q (ハ) c と r

- (2) 2 曲線 $k_1: x^3 + ax^2 + bx + c, k_2: x^3 + px^2 + qx + r$ の交点を A, B とし、線分 AB の中点 M を通り、 y 軸に平行線を引き、2 曲線 k_1, k_2 との交点をそれぞれ C, D とする。 C における k_1 の接線と D における k_2 の接線とは平行であることを証明せよ。

◆選択甲

5. $2^n < n^2$ となる整数 n をすべて求めよ。それらの数よりも大きい整数 n について $2^n < n^2$ が成り立たないことの証明には、数学的帰納法を用いよ。

6. $f(x) = \int_0^x \sin(x-t) \sin t \, dt$ のとき、次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \qquad (2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)}{x}$$

◆選択乙

7. $f(x)$ は係数がすべて整数であるような多項式で、恒等的には 0 でないものとする。方程式 $f(x) = 0$ が 2 解 1, 3 をもつとき、 $f(x)$ の係数のうちに、 -3 よりも大きくないものがあることを証明せよ。

8. AB を直径とする半円の弦 AC 上の点 P と B とを結び、線分 BP の P の方への延長上に点 Q を $\angle BAP = \angle QAP$ となるようにとる。 $\frac{AP}{PC} = \frac{m}{n}$ のとき $\frac{BP}{PQ}$ の値を求めよ。

解答

1. (1) $-2 \leq x \leq 4$ (2) $x = 1, 4$

2. (1) B は線分 AC の中点 (2) AC の中点と BD の中点が一致

3. 18

4. (1) (イ) $a > p$ (ロ) $b < q$ (ハ) $c > r$ (2) 略

5. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

6. (1) 0 (2) $\frac{1}{2}$

7. 略

8. $\frac{m+2n}{m}$