1967 年	神戸大学　数学入試問題	

◆文理共通

１．次の問いに答えよ。

(1) x , y についての連立方程式

$$\begin{cases} 3^x 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$$

を解け。

(2) 関数 $f(x) = (2x+1)(3x^2-5x+1)$ の $x=1$ における微分係数を求めよ。

２．0 でない整数 x , y に対して、y が x で割り切れるとき、$x \angle y$ とかく。このとき次の問いに答えよ。

(1) 次の(a) , (b)の成立しない例をそれぞれあげよ。

(a) $x \angle y$ で $y \angle x$ のとき、$x = y$

(b) $x \angle y$, $x = y$, $y \angle x$ のうち少なくとも 1 つは成立する。

(2) $x \angle y$ と $y \angle x$ が同時に成立するとき、$x \sim y$ とかく。$x \angle 1364$ となるような整数 x の個数を n とするとき、$n \sim m$ なる整数 m をすべて求めよ。

３．5 つの方程式 $f_1(x) = 0$ … A , $f_2(x) = 0$ … B , $f_3(x) = 0$ … C , $f_4(x) = 0$ … D , $f_5(x) = 0$ … E はどれも解を持っており、これらの解について次の 5 つのこと, イ～ホ, がわかっている。

イ A の解でないものは B の解ではない。

ロ C の解はどれも B の解ではない。

ハ D の解はどれも B の解である。

ニ D の解はどれも E の解である。

ホ E の解であるような C の解がある。

このとき、次の命題(1)～(5)のうち正しいものの番号を記し、それらを証明せよ。証明に際しては、イ～ホのうちどれをどこで用いたかを明記せよ。

(1) E の解はどれも B の解である。

(2) A の解のうちには C の解がある。

(3) D の解はどれも A の解である。

(4) D の解でないような E の解がある。

(5) E の解のうち少なくとも 1 つは A の解ではない。

４. ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の内積を($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$)で表し、$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ とおく。$\mathbf{a}_n$, $\mathbf{b}_n$ ($n = 1, 2, \cdots$)

がベクトルで $|\mathbf{a}_n| \leqq 1$, $|\mathbf{b}_n| \leqq 1$, $\lim_{n\to\infty} |\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n| = 2$ のとき、 $\lim_{n\to\infty} |\mathbf{a}_n - \mathbf{b}_n|$ を求めよ。

５. 一般に複素数 $\alpha = a + ib$ (a , b は実数, $i = \sqrt{-1}$) に対して、$\overline{\alpha} = a - ib$ とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1) α, β がともに 0 でない複素数で、$\overline{\alpha}\beta$ が実数であれば、β は α の実数倍であることを証明せよ。

(2) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が互いに異なる 0 でない複素数であり、$\overline{\alpha}\gamma$, $\overline{\beta}\delta$, $\overline{\alpha}\delta + \overline{\beta}\gamma$ がすべて実数であるとき、$\alpha - \beta$ の偏角と $\gamma - \delta$ の偏角との関係にどんな関係があるか。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ とする。

６. $0 < a \leqq 1$, $|b| \leqq 1$, $0 \leqq a + b$ なる a , b を係数にもつ 3 次曲線 $y = ax^3 + bx + 1$ の全体を考え、これらの曲線上の点の全体を M で表す。このとき、

$$0 < x < 1 ,\ x^3 - x + 1 < y < x^3 + x + 1$$

を満足する点(x , y)の全体は M に含まれるか。

７. 0 と 1 の間にある小数のうち $0.x_1x2\cdots x_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) と表される有限小数を β 数と呼ぶことにする。ただし、x_1 , $x2$, $\cdots$, x_n はそれぞれ 1 か, または 2 とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) とくに $n = 5$ としたとき β 数は全部でいくつあるか。

(2) n が 1 , 2 , $\cdots$, と自然数を動いたときに得られる β 数の全体を B で表す。B には最小の β 数があるか。また最大の β 数があるか。

◆理系

８．正数からなる無限数列 a_1 , $a2$, … , a_n , … が $2{a_n}^3 = {a_{n-1}}^4$ ($n = 2$, 3 , …) を満たすとき、

(1) a_n を n と a_1 で表せ。

(2) $n \to \infty$ のとき、数列$\{a_n\}$が収束するような a_1 の範囲を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$が収束するとき、その極限値を求めよ。

９. 連続な関数$f(x)$が $0 \leqq x$ において $\{f(x)\}^n = \int_0^x f(t)\,dt + 1$ を満足する（ここに、$\{f(x)\}^n$ は関数$f(x)$の n 乗を表す）。このとき、$f(x)$を求めよ。ただし、n は正の整数で、$f(x) > 0$ とする。

解答

１．(1) $(x, y)=\left(\pm\sqrt{10}, \pm\dfrac{\sqrt{10}}{100}\right), \left(\pm 1, \pm\dfrac{1}{10}\right)$　　(2) 1

２．(1) (a) $x=a$, $y=-a$ (a は 0 でない整数)　(b) $x=2$, $y=3$　(2) ± 24

３．(3) (イ)より B⊂A , (ハ)より D⊂B　∴D⊂A

(4) (ハ)より D⊂B , (ロ)より B∩C＝ ϕ　∴D∩C＝ ϕ　(ホ)によｔｔｗ、E∩C＝ ϕ だから E∩C に含まれる元は D に含まれない。よって、(4)が成立

４，0

５．(1) $\overline{\alpha}\beta=k$ (k は実数) とおくと、$\beta=\dfrac{k}{\overline{\alpha}}=\dfrac{k}{|\alpha|^2}\cdot\alpha$ より

(2) $\arg(\alpha-\beta)=\arg(\gamma-\beta)$ または $\arg(\alpha-\beta)\sim\arg(\gamma-\beta)=2\pi$

６．含まれる

７．(1) 32 個　(2) 0.1 が最小のβ数 , 最大のβ数は存在しない

８．(1) $a_n=2\left(\dfrac{a_1}{2}\right)^{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$　(2) $0<a_1\leqq 2$　(3) $a_1=2$ のとき 2 , $0<a_1<2$ のとき 0

９．$n=1$ のとき $f(x)=e^x$, $n\geqq 2$ のとき $f(x)=\sqrt[n-1]{\dfrac{n-1}{n}x+1}$