1969 年	神戸大学　数学入試問題

◆文理共通

１．次の問い(1)～(2)に答えよ。

(1) 次の[イ]～[ヘ]を埋めよ。

a , b を $0 < b < a$ なる整数とし、$\dfrac{b}{a}$ を既約分数とする。$\dfrac{b}{a}$ が小数第 n 位までの有限小数であるための必要かつ十分な条件を求めよう。

$\dfrac{b}{a}$ がこのような有限小数と仮定すると、$\dfrac{b}{a}$ は $10^{イ[\ ]}$ 倍することにより整数となる。これを c とすると、$\dfrac{b}{a}\times 10^{イ[\ ]} = c$　ところがロ[　]であるから、a はハ[　]の約数であり、次のような素数の累乗の積に分解できる。$a=$ニ[　]

逆に、a がこの形のときは、$\dfrac{b}{a}\times 10^{ホ[\ ]}$ は、整数となる。ゆえに $\dfrac{b}{a}$ はこの整数を $10^{ホ[\ ]}$ で割ったものであるから、小数第 n 位までの有限小数となる。

上の結果より、一般に既約分数 $\dfrac{b}{a}$ ($0 < b < a$)が有限小数であるための必要かつ十分な条件はヘ[　]

(2) $\dfrac{1}{2}$ より大きく、1 より小さい既約分数 $\dfrac{21}{a}$ が有限小数となるような a をすべて求めよ。

２．z を複素数, $|z|$ を z の絶対値, a , b , c を $a < b < c$ なる定数とする。複素平面上で不等式 $|z|^3 - (a+b+c)|z|^2 + (ab+bc+ca)|z| - abc \leqq 0$ を満たす点 z の存在範囲の面積を求めよ。

３．白, 青, 赤の旗が n 枚ずつある。これらの $3n$ 枚の旗を上から下へ 1 列に並べて信号を作ろうと思う。次の問い(1) , (2)に答えよ。

(1) k 番目以下はすべて同じ色の旗が並ぶような信号はいく通りあるか。

(2) 全問で作られた信号のうち、k 番目以下に続く旗の色が、$k-1$ 番目の色とは異な

っているような信号はいく通りあるか。

４．原点 O を一端とし、点$(1,2,2)$を通る半直線を g とする。次の問(1) , (2)に答えよ。

(1) g 上の点で原点からの距離が $3t$（$t \geqq 0$）である天の座標を求めよ。

(2) いま、x 軸, y 軸および直線 g の上に、それぞれ適当に点 A , B , C をとり、ほかに 1 点 D$(k, 3, -1)$をとる。4 点 A , D , B , C をこの順序に結んでできる 4 辺形がひし形になるには、k はどんな値をとればよいか。

５．$A+B+C=\pi$, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ なるとき、これを用いて $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を導け。

６．次の問(1)〜(3)に答えよ。

(1) n を自然数, $x \geqq 1$ とするとき、次の不等式を証明せよ。

$$x^n > n(x-1)$$

(2) 問(1)の不等式の x に適当な数値を代入することによって、不等式

$$1.1^n > Cn^2$$

が任意の自然数 n に対して成り立つように、正の定数 C を求めよ。答えは有限小数で 1 つだけ書け。

(3) 問(2)の不等式を用いて、数列の極限値 $\left\{\dfrac{n}{1.1^n}\right\}$ を求めよ。

７．曲線 $x=\begin{cases}\sqrt{25-(y-5)^2} & (0 \leqq y \leqq 9)\\ 3 & (9 \leqq y \leqq 18)\end{cases}$

を、y 軸を軸として 1 回転した形の容器がある。いま、この回転の軸を水平面に垂直にして、この容器に毎秒 9π の割り合いで注水する。注水し始めてから t 秒後における水面の高さを h として、h の変化を示すグラフを書け。また満水するのは何秒後か。

◆理系

８．a を定数, q を 1 より小さい正の定数とする。次の問(1) , (2)に答えよ。

(1) 方程式 $x = q\sin x + a$ はただ 1 つの実数解をもつことを示せ。

(2) 数列$\{x_n\}$を、$x_0 = 0$, $x_n = q\sin x_{n-1} + a$ （$n = 1 , 2 , 3 , \cdots$）で定めるとき、数列$\{x_n\}$は前問の方程式の解に収束することを示せ。

９．次の問(1) , (2)に答えよ。

(1) 曲線$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$の概形を書け。

(2) 前問の曲線を 2 点(1 , 0) , (0 , 1)を通る直線のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答

解答