1989 年	# 神戸大学　数学入試問題

◆理系

１．a を実数とする。$M=\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として、$A=M^2+3M+2E$ とおく。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 行列 A を $A=(M+2E)B$ と表したとき、行列 B を求めよ。

(2) 行列 A は常に逆行列 A^{-1} を持つことを証明し、それを求めよ。

(3) 逆行列 A^{-1} が $A^{-1}=\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$ となるような a の値、およびそのときの p , q の値を求めよ。

２．長方形 ABCD の頂点 A から対角線 BD に垂線をひき、BD との交点 P とする。次に、点 P から辺 BC , CD のそれぞれに引いた垂線の長さを x , y とする。対角線 BD の長さを a , 線分 AP の長さを z とするとき、次の各問いに答えよ。

(1) $\angle \mathrm{ADB}=\theta$ とするとき、x , y を a , θ で表せ。

(2) $\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくとき、$x+y+z$ を t の式で表せ。

(3) a が一定のとき、$x+y+z$ のとりうる値の範囲を求めよ。

３．k を正の定数とする。すべての実数 x で微分可能な関数 $y=f(x)$ が条件 $f(x)=0$ かつ $0<f'(x)<k$ を満たしているとき、次の各問いに答えよ。

(1) この関数のグラフは、y 軸の右側では x 軸と直線 $y=kx$ との間にあることを証明せよ。

(2) $0<k<1$ のとき、数列 $\{a_n\}$ を正の数 a_1 からはじめて $a_n=f(a_{n-1})$（ $n=2,3,4,\cdots$ ）で定める。そのとき、$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

４．A の袋には 1 と-1 のカードが 1 枚ずつ、B の袋には 0 と 1 のカードが 1 枚ずつ入っている。A , B の袋から、それぞれ 1 枚のカードを任意に取り出し、互いのカードを交換して袋に戻すという試行を繰り返す。いま、n 回の試行の後、A の袋の中に入っている 2 枚のカードの数の和が k になる確率を $P_n(k)$で表す。ただし、n は自然数とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $P_2(-1)$, $P_2(0)$, $P_2(1)$および $P_2(2)$をそれぞれ求めよ.

(2) $n \geqq 2$ とするとき、$P_n(1)$を $P_{n-1}(-1)$, $P_{n-1}(0)$, $P_{n-1}(1)$および $P_{n-1}(2)$を使って表せ。

(3) $P_n(1)$を求めよ。

５．すべての実数 x で微分可能な 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$が、次の①, ②を満たしているとする。

$$f(x) = 2g(x) + 2e^{-x}\sin x + 1 + \int_0^x f(t)\,dt \quad \cdots ①$$

$$g(x) = \frac{1}{2}f(x) - 2e^{-x}\sin x - \frac{1}{2} - 2\int_0^x g(t)\,dt \quad \cdots ②$$

このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $f(x) - 2g(x) = e^{2x}$ が成立することを証明せよ。

(2) $f(x)$, $g(x)$を求めよ。

◆文系

１．四面体 ABCD において、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をそれぞれ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表す。辺 AB , DC を 1 : 2 の比に内分する点をそれぞれ M , N とし、辺 AD , BC を 2 : 3 の比に内分する点をそれぞれ P , Q とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) 線分 MN を $u : v$ の比に内分する点を E としたとき、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ および u , v を用いて表せ。ただし、$u > 0$, $v > 0$ とする。

(2) 線分 PQ を $x : y$ の比に内分する点を F としたとき、2 点 E , F が一致するような、比 $u : v$ および $x : y$ を求めよ。ただし、$x > 0$, $y > 0$ とする。

２．t を実数として、x の関数 $f(x)=(x-6)(x-3t)$ を考える。$f'(x)=0$ の解を α,β（$\alpha<\beta$）とすると、α,β は t によって定まるから、それぞれ t の関数になる。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) t の関数 $g(t)=(t-\alpha)^2+(t-\beta)^2+t^2$ について、定積分 $\int_0^2 g(t)\,dt$ の値を求めよ。

(2) $1 \leqq t \leqq 3$ のとき、$|6-\alpha|+|6-\beta|$ の最小値を求めよ。

３．3 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ および $h(x)$ を、それぞれ

$$f(x)=2^x\ ,\ g(x)=\int_0^x f(x-t)f(t)\,dt\ ,\ h(x)=\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt+2\int_0^x g(x-t)g(t)\,dt$$

とする。このとき、次の各問いに答えよ。

(1) $g(x)$, $h(x)$ を求めよ。

(2) $F(x)=\dfrac{h(x)}{f(x)}$ とするとき、曲線 $y=F(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。