1996 年	神戸大学　数学入試問題	

◆理系

１．O を原点とする平面上において、点 A は半円$(x-1)^2+y^2=1$（$y<0$）上にある。点 B は $2\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ をみたし、y 軸上の正の部分にあるとする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき、2 点 A , B の座標を θ を用いて表せ。

(2) 線分 AB と x 軸の交点を C とする。点 A を点 O に近づけるとき、$\dfrac{\mathrm{OC}}{\mathrm{AB}^2}$ の極限値を求めよ。

２．数列$\{a_n\}$は次の関係をみたす。

$$a_1=0$$
$$a_n\sin\theta+a_{n+1}\cos\theta=\sin\theta\cdot\cos\theta\qquad(n=1,2,\cdots)$$

ただし、$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) a_n を n と θ を用いて表せ。

(2) $n\to\infty$のとき、数列$\{a_n\}$が収束するようなθの範囲と、そのときの極限値$f(\theta)$を求めよ。

(3) θが(2)で求めた範囲を動くとき、$f(\theta)$の値の範囲を求めよ。

３．数列$\{f_n\}$は次の性質(i) , (ii) , (iii)をもつとする。

(i) $f_1=0$

(ii) i,j が正の整数であるとき、積 ij に対して $f_{ij}=f_i+f_j$

(iii) i,j が $i<j$ をみたす正の整数であるとき $f_i<f_j$

このとき、次の各問に答えよ。

(1) r,s が正の整数であるとき、整数 s^r に対して $f_{s^r}=rf_s$ が成り立つことを示せ。

(2) k,l をいずれも 2 以上の整数とし、$l^m<k^N\leqq l^{m+1}$ をみたす 0 以上の整数 m をとる。不等式 $\dfrac{m}{N}<\dfrac{f_k}{f_l}\leqq\dfrac{m+1}{N}$ が成り立つことを示せ。

４．点 P は x 軸上を、負の方向から原点を通過し、正の方向に動くとする。時刻 t（秒）における、点 P の位置を表す関数を $x(t)$とし、点 P の速度を表す関数を $v(t)$とする。ただし、$x(t)$, $v(t)$は各時刻で連続とする。

$x(t)<0$ のとき、点 P の運動は微分方程式 $\dfrac{dv(t)}{dt}=32-2v(t)$ をみたし、$x(t)>0$ のとき、点 P の運動は微分方程式 $\dfrac{dv(t)}{dt}=24-6v(t)$ をみたす。このとき、次の各問に答えよ。

(1) $v(0)=0$, $x(0)=-50$ とする。m 秒から $m+1$ 秒の間に、動点 P は原点に到達する。このような整数値 m を求めよ。

(2) 原点を通過した後、n 秒から $n+1$ 秒の間に、動点 P は $x=10$ の点を通過する。このような整数値 n を求めよ。ただし、P が原点を通過する速度は 15.9886…であるが、計算上 16 としてよい。

５．ある人が次のゲームを行う。1 から 5 までの数が 1 つずつ書かれたカードが計 5 枚入った袋がある。正三角形 ABC の頂点 B を出発点にして、袋から 1 枚のカードを取り出すごとに、そのカードに書かれた数だけ BCAB…の順に頂点を移動する。ただし、取り出したカードはもとの袋に戻し、よくかき混ぜるとする。ちょうど頂点 A に移動すれば、上がりとなりゲームは終了する。

例えば、頂点 B にいるとき 1 または 4 のカードが出れば頂点 C に移動し、また頂点 B にいるとき 2 または 5 のカードが出れば頂点 A に移動し、ゲームは終了する。

n 回以下の試行でゲームが上がりとなる確率を a_n とする。また、n 回の試行を終えたときに、ちょうど頂点 B にいる確率を b_n , ちょうど頂点 C にいる確率を c_n とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) a_2 , b_2 , c_2 を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ のとき、b_n+c_n , b_n-c_n を b_{n-1} , c_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n , b_n , c_n を n で表せ。

◆文系

１．零ベクトルでない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して、$0 < m \leqq n$ となる整数 m, n があり $2\vec{a}\cdot\vec{b} = m\vec{a}\cdot\vec{a} = n\vec{b}\cdot\vec{b}$ が成り立つとする。このとき、$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ ($0° \leqq \theta \leqq 90°$) の値と、そのときの $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ の値をすべて求めよ。ただし、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトルの内積、$|\vec{a}|$ はベクトルの大きさである。

２．xy 平面上の 2 次曲線 C を $9x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 60$ とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) 曲線 C は、原点の周りに角度 θ ($0° \leqq \theta \leqq 90°$) だけ回転すると、$ax^2 + by^2 = 1$ の形になる。θ の値と定数 a, b を求めよ。

(2) 曲線 C 上の点と点（c, $-\sqrt{3}c$）との距離の最小値が 2 であるとき、c の値を求めよ。ただし、$c > 0$ とする。

３．3 次曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($-1 \leqq x \leqq 1$) と x 軸に囲まれる図形を、x 軸の周りに 1 回転させてできる体積を V とする。このとき、V を最小にする a, b, c の値と、そのときの V の値を求めよ。