1998年	神戸大学　数学入試問題

◆理系

１．座標平面内の 8 点 O(0 , 0 , 0) , A(2 , 0 , 0) , B(2 , 2 , 0) , C(0 , 2 , 0) , P(0 , 0 , 1) , Q(2 , 0 , 1) , R(2 , 2 , 1) , S(0 , 2 , 1)を頂点とする直方体を考える。次の問いに答えよ。

(1) D = (x , y , 1)を面 PQRS 上の点とするときベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を x , y およびベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}$を用いて表せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$がベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$と直交するための条件を x , y を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CQ}}$である$D$の中で$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$が最小となるような D を与える x , y の値を求めよ。

２．$0 < a < 4$ とし、座標平面上の 4 点(0 , 0) , (a , 0) , (a , $a-4$) , (0 , $4-a$)を頂点とする長方形の内部を I_a とする。$y \leqq \dfrac{1}{x}$ をみたす I_a の点(x , y)全体のなす図形の面積を $S(a)$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $S(a)$を a を用いて表せ。

(2) $S(a)$の最大値を求めよ。

３．次の 3A と 3B のいずれかを選択して答えよ。

3A．行列$\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$によって表される一次変換 f によって、平面全体が直線 $y = mx$ ($m \neq 0$) に移されているとき、次の問いに答えよ。

(1) a , b を m を用いて表し、原点を中心とする半径 1 の円周は f によりどんな線分に移されるか答えよ。

(2) (1)で求めた線分の長さを最小にする m の値と、そのときの線分の長さを求めよ。

3B．次の各問いに答えよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, B_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき $AB_1 - B_1A$ と $AB_2 - B_2A$ を計算せよ。

(2) 3×3 行列 A で、任意の 3×3 行列 B に対して $AB = BA$ をみたすものをすべて求めよ。

４．$0<x<\dfrac{1}{2}$ とする。一辺の長さが 1 の正方形の紙の 4 つのすみから、一辺の長さが x の正方形を切り取りふたのない箱 A を作る。さらに、切り取った一辺の長さが x の正方形の 4 つのすみをそれぞれ切り取り、A と相似なふたのない箱 B_i（$i=1,2,3,4$）を作る。次の問いに答えよ。

(1) 箱 A の容器 $f(x)$ を最大にする x の値 a を求めよ。

(2) 箱 B_i の容積 $g(x)$ を最大にする x の値 b を求めよ。

(3) 方程式 $f'(x) + 4g'(x) = 0$ が区間 $a<x<b$ に解を持つことを示せ。

５．A 地点から B 地点まで 0 または 1 の一文字からなる信号を送る。A 地点と B 地点の間に中継点を $2n-1$ 箇所作り、AB 間を $2n$ 個の小区間に分割すると、一つの区間において 0 と 1 が連続して伝わる確率は $\dfrac{1}{4n}$ である。このとき A 地点を出発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わる確率を P_{2n} とする。次の問いに答えよ。

(1) 偶数回の逆転があると、A 地点を出発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わることに注視して P_2 を求めよ。

(2) $(a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}C_{2k}a^{2n-2k}b^{2k}$ を示せ。

(3) P_{2n} を求めよ。

(4) $\lim_{n\to\infty} P_{2n}$ を求めよ。

◆文系

1．次の 1A と 1B のいずれかを選択して答えよ。

1A. 理系 3A と同じ

1B. 次の各問いに答えよ。

(1) z が虚数で $z+\dfrac{1}{z}$ が実数のとき $|z|$ の値 a を求めよ。

(2) (1)で求めた a に対して、z が条件 $|z|=a$ をみたしながら動くとき、
$\omega=(z+\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^4$ の絶対値と偏角の動く範囲を求めよ。

2．$a>0$ とする。関数 $f(x)=|x^3-3a^2x|$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とするとき、次の各問に答えよ。

(1) $M(a)$ を a を用いて表せ。

(2) $M(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

3．理系１と同じ