

◆理系

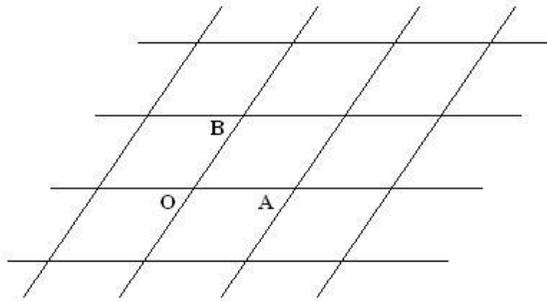
1. $0 < a < \frac{\pi}{2}$ とし、関数 $f(x)$ を $f(x) = |x - a| \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) とする。 $y = f(x)$ のグラフ

と、 x 軸および直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を S とするとき、次の問いに答えよ。

(1) S を a を用いて表せ。

(2) a が $0 < a < \frac{\pi}{2}$ の範囲で動くときの S の最小値を求めよ。

2. 合同な平行四辺形を平面にしきつめて、図のように 2 組の平行線からなる格子を作り、その各交点を格子点と呼ぶ。



図のような 3 つの格子点 O, A, B について $|\overrightarrow{OA}|^2, |\overrightarrow{OB}|^2, |\overrightarrow{AB}|^2$ はすべて整数であると

する。このとき、どの 2 つの格子点 P, Q に対しても $|\overrightarrow{PQ}|^2$ は整数となることを示せ。

3. m は実数とし、関数 $f(x)$ を $f(x) = (x^2 - x + m) \sin 3\pi x$ ($0 < x < 1$) とする。このとき $f(a) = 0$ となる a ($0 < a < 1$) のうち、 $x = a$ を境目にして関数 $f(x)$ の符号が変化するものの個数を求めよ。

4. 連立不等式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{3}$, $x > 3$, $y > 3$ の表わす領域を D とする。このとき次の各問に

答えよ。

(1) D を図示せよ。

(2) D 内を (x, y) が動くとき $2x + y$ のとる最小値を求めよ。また、そのときの x, y の値を求めよ。

5. t は $-1, 0, 1$ のいずれとも異なる実数とする。行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき、次の各問に答えよ。

(1) 3×3 行列 X で $AX = tXA$ をみたすものをすべて求め、 X^3 が零行列となることを示せ。

(2) X は $AX = tXA$ をみたす 3×3 行列であるとする。2 以上の自然数 n に対して

$$(x + A)^n = A^n + b_n X A^{n-1} + c_n X^2 A^{n-2}$$

と書けることを示し、 b_{n+1}, c_{n+1} を b_n, c_n を用いて表せ。ただし、 A^0 は 3 次の単位行列を表すものとする。

◆文系

1. 2 の倍数でも 3 の倍数でもない自然数全体を小さい順に並べてできる数列を $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ とする。このとき次の各問に答えよ。

(1) 1003 は数列 $\{a_n\}$ の第何項か。

(2) a_{2000} の値を求めよ。

(3) m を自然数とするととき、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2m$ 項までの和を求めよ。

2. 理系 2 と同じ

3. a, b, c, d は実数として、 x の整式 $f(x), g(x)$ が以下の条件をみたしているとする。

$$f(x) + g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) + g'(x) = bx^2 + cx + d \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\int_a^x \{f(t) - g(t)\} dt = x^3 - ax^2 + ax - 2 \quad \dots \textcircled{3}$$

このとき $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。